

## Princípio da Indução Finita

Edson Roberto Abe

09 / novembro / 2021

1 – Prove que  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2; \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

2 – Prove que  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

3 – Observe que

$$1^2 = \frac{1.2.3}{6}$$

$$1^2 + 3^2 = \frac{3.4.5}{6}$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 = \frac{5.6.7}{6}$$

Obtenha a regra geral sugerida por estes exemplos, e prove-a.

4 – Prove que  $n^3 - n$  é divisível por 6,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

5 – Prove que  $5.7^n - 3^n$  é divisível por 4,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

6 – Demonstrar que para qualquer número natural  $n$ ,  $11^{n+2} + 12^{2n+1}$  é divisível por 133.

7 – Prove que  $4^n + 15n - 1$  é divisível por 9,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

8 – Demonstrar que  $10^{n+1} - 9n - 10$  é um múltiplo de 81 para todo inteiro positivo  $n$ .

9 – Demonstrar que  $7^{2n} - 48n - 1$  é um múltiplo de  $48^2$  para todo inteiro positivo  $n$ .

10 – Demonstrar que  $\frac{n^3}{3} + \frac{n^5}{5} + \frac{7n}{15}$  é um inteiro positivo para todo inteiro positivo  $n$ .

11 – Prove que:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020} = \frac{1}{1011} + \frac{1}{1012} + \dots + \frac{1}{2020}.$$

12 – Prove que todos os números da forma 1007, 10017, 100117, ... são divisíveis por 53.

13 – Prove que todos os números da forma 12008, 120308, 1203308, ... são divisíveis por 19.

14 – A sequência  $a_n$  é definida como segue:  $a_0 = 9$ ,  $a_{n+1} = 3a_n^4 + 4a_n^3$ ,  $n > 0$ . Mostre que  $a_{10}$  contém mais do que 1000 noves na notação decimal.

15 – Prove que

$$2^{m+n-2} \geq mn$$

se  $m$  e  $n$  forem inteiros positivos.

16 – Usando  $F_0 = 0$  e  $F_1 = 1$ , prove que:

$$F_1 F_2 + F_2 F_3 + \dots + F_{2n-1} F_{2n} = F_{2n}^2$$

17 (TM<sup>2</sup> – 2019) – Durante a aula de fatoração, Esmeralda observou que 1, 3 e 5 podem ser escritos como diferença de dois quadrados perfeitos, como se pode observar:

$$1 = 1^2 - 0^2$$

$$3 = 2^2 - 1^2$$

$$5 = 3^2 - 2^2$$

a) Mostre que todos os números escritos na forma  $2 \cdot m + 1$  podem ser escritos como diferença de dois quadrados perfeitos consecutivos.

b) Mostre como calcular o valor da expressão  $E = 1 + 3 + 5 + \dots + (2m + 1)$ .

c) Esmeralda, contente com o que descobriu, decidiu procurar outras formas de escrever 2019 como a diferença de dois quadrados perfeitos de inteiros positivos. Determine de quantas formas ela pode fazer o que deseja.