Semana Olímpica 2021
Tabuleiros
Nível 1

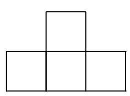
Samuel Feitosa

Exercício 1. (Problema Clássico) Se removermos duas casas diagonalmente opostas de um tabuleiro 8×8 ainda é possível cobrir as 62 casas restantes com 31 dominós?

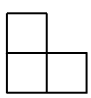
Exercício 2. (Problema Clássico) Um tabuleiro 6×6 é coberto com dominós. Mostre que existe uma reta que corta o tabuleiro em duas partes sem cortar qualquer dominó.

Exercício 3. É possível cobrirmos um tabuleiro 8×8 com dominós se removermos uma casa de cada cor, não importando quais as casas?

Exercício 4. Podemos cobrir um tabuleiro 10×10 usando apenas T-tetraminós como abaixo?



Exercício 5. É possível cobrirmos um tabuleiro 8×8 com 21 L-triminós se removermos do tabuleiro uma casa qualquer?



Exercício 6. Mostre que um tabuleiro 8×8 não pode ser coberto por 15 T-tetraminós e um tetraminó quadrado.

Exercício 7. Um tabuleiro $a \times b$ é coberto por peças de tamanho $1 \times n$. Mostre que n divide a ou n divide b.

Exercício 8. Sejam m e n inteiros maiores que 1. Se um tabuleiro de dimensões $m \times n$ pode ser coberto com L-tetradomino então $m \cdot n$ é múltiplo de 8.

Exercício 9. (Olimpíada do Colorado) Existe algum modo de distribuirmos os sinais de $+$ e $-$ nas casas de um tabuleiro 2001×2001 de modo que as alterações de sinais em todas as casas de tabuleiros 1000×1000 e 1001×1001 não permitam a obtenção de um tabuleiro com todas as casas contendo $+$?

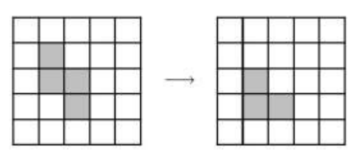
Exercício 10. (Olimpíada do Colorado) Mark e Julia estão jogando o seguinte jogo em um tabuleiro 1988×1989. Na sua vez, cada jogador coloca um quadrado 1×1 em uma das casas do tabuleiro. Após cada um deles realizar exatamente 100 jogadas e, consequentemente, terem coberto 200 quadradinhos, um jogador é determinado vencedor como segue: Julia vence se as casas restantes podem ser cobertas por dominós. Caso contrário, Mark vence. Qual jogador possui a estratégia vencedora? Mark é o primeiro a jogar.

Exercício 11. (Ucrânia 1997) Um tabuleiro é colorido de branco e preto da maneira usual, e cada casa contém um inteiro. Sabemos que a soma dos números em cada coluna e a soma dos números em cada linha é par. Mostre que a soma dos números nas casa pretas é par.

Exercício 12. Em um tabuleiro 30×30, as linhas e as colunas estão numeradas de 1 a 30. Em cada linha, João pinta de vermelho as casinhas que estão nas colunas em que o o número é múltiplo do número da linha. Quantas casinhas serão pintadas de vermelho? Justifique sua resposta.

Exercício 13. Maria e Pedro jogam em um tabuleiro 9×9. Maria começa pintando de vermelho 46 quadradinhos do tabuleiro. Em seguida, Pedro deve escolher um quadrado 2×2. Se o quadrado escolhido por Pedro tem 3 ou mais casinhas pintadas de vermelho, ele vence o jogo. Caso contrário, vence Maria. Qual dos dois pode sempre garantir a vitória independentemente da jogada do adversário?

Exercício 14. Suponha que n quadrados de um tabuleiro infinito são coloridos de cinza, e que o os quadrados restantes são coloridos de branco. Em cada passo, um novo tabuleiro de quadrados é obtido baseado no anterior, como segue: Para cada posição no tabuleiro, examine o quadrado da posição, o quadrado imediatamente acima e o quadrado imediatamente à direita. Se existem dois ou três quadrados com a cor cinza entre eles, então no novo tabuleiro essa posição terá a cor cinza, caso contrário ela terá a cor branca. Mostre que após no máximo n passos todos os quadrados terão a cor branca. Apresentamos um exemplo com $n = 4$:



O primeiro tabuleiro mostra a configuração inicial e o segundo mostra a configuração após um passo.

Exercício 15. Determine se é possível cobrir sem sobreposição um tabuleiro 6×6 com duas casas opostas removidas com dominós?

Exercício 16. E possível que um cavalo do xadrez passe por todas as casas de um tabuleiro 4×10 exatamente uma vez e, em seguida retorne para o quadrado original?

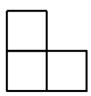
Exercício 17. Sobre uma das casas de um tabuleiro infinito, existe um cubo que cobre a casa perfeitamente. A face no topo do cubo é branca, enquanto as demais faces são pretas. A cada passo, podemos tombar o cubo para um dos lados. É possível que:

a) Após 2004 passos o cubo volte ao mesmo quadrado com a face branca para baixo?

b) Após 2005 passos?

Exercício 18. (Rússia 1996) Podemos cobrir um tabuleiro 5×7 com L-triminós que tal forma que cada casa do tabuleiro seja coberta por um mesmo número de peças?

Exercício 19. Paladino deve pintar de preto algumas casa de um tabuleiro 4×4 de modo que quaisquer três quadradinhos que formem uma figura congruente ao desenho abaixo tenham pelo menos um de seus quadradinhos pintados. Qual o menor número de quadradinhos que devem ser pintados por Paladino?

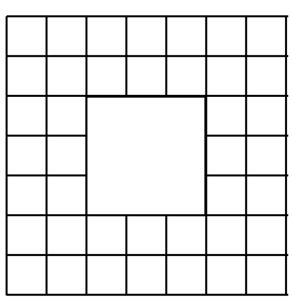


Exercício 20. É dado um tabuleiro 8×8.

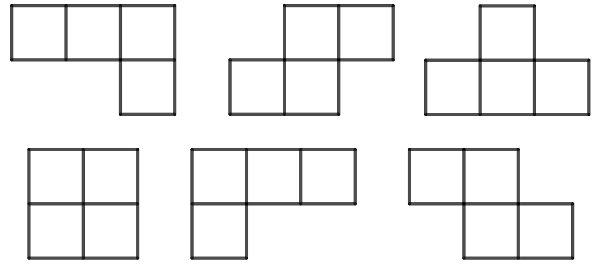
a) Qual o número mínimo de casinhas que devemos marcar nesse tabuleiro, de modo que cada um de seus subtabuleiros 3×3 possua pelo menos uma casinha marcada?

b) Qual o número mínimo de casinhas que devemos marcar nesse tabuleiro, de modo que cada um de seus subtabuleiro 3×3 possua pelo menos três casinhas marcadas?

Exercício 21. Joana ganhou um quebra cabeça com um tabuleiro, como o da figura abaixo.



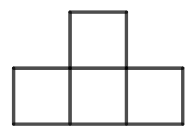
Este tabuleiro deve ser completamente preenchido com peças como as da figura abaixo, de forma que não pode haver sobreposição de peças e cada peça preencha exatamente quatro quadradinhos do tabuleiro.



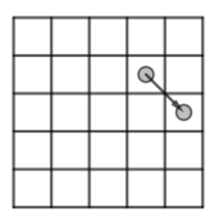
a) Quantas peças são necessárias para preencher o tabuleiro?

b) Preencha o tabuleiro utilizando as peças que julgar necessário (pode utilizar de um único tipo de peça até todos os tipos).

c) É possível preenchê-lo utilizando, exatamente, uma peça como a da figura abaixo e as demais dos outros tipos de peça?



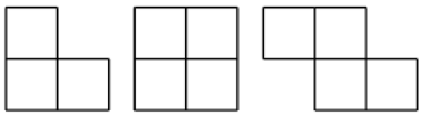
Exercício 22. Em um tabuleiro 5×5, cada quadradinho possui uma peça em seu centro. O único movimento permitido para uma dessas peças e se deslocar para um quadradinho que compartilhe exatamente um vértice com o quadradinho em que ela está, como indicado na figura abaixo. Tanto é possível que várias peças ocupem um mesmo quadradinho quanto que um quadradinho fique vazio. Em um dado momento, todas as peças serão movidas simultaneamente. Qual o número mínimo de quadradinhos vazios poderão ser encontrados após esse momento?



Exercício 23. Um tabuleiro 7×7 é coberto com 16 peças 1×3 e uma peça 1×1. Prove que a peça 1×1 está ou no centro do quadrado ou adjacente ao bordo do tabuleiro.

Exercício 24. (OBM 2007) Arrumam-se 2007^2 quadradinhos iguais, formando um tabuleiro 2007×2007. Arnaldo e Bernaldo disputamo seguinte jogo: cada jogada de Arnaldo consiste em retirar 4 quadradinhos que formem um quadrado 2×2. Cada jogada de Bernaldo consiste em retirar apenas 1 quadradinho. Os jogadores jogam alternadamente, sendo Arnaldo o primeiro a jogar. Quando Arnaldo não puder fazer sua jogada, Bernaldo fica com todas as peças restantes do tabuleiro. Ganha o jogo aquele que possuir mais quadradinhos no final. É possível que Bernaldo ganhe o jogo, não importando como Arnaldo jogue?

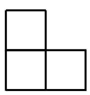
Exercício 25. (Leningrado) Um tabuleiro 7×7 foi coberto sem sobreposição pelas figuras abaixo



Tipo 1 *Tipo 2* *Tipo 3*

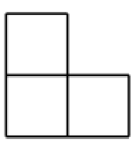
Prove que foi utilizada exatamente uma peça com 4 quadrados.

Exercício 26. Qual é o menor número de quadrados de um tabuleiro 8×8 que devemos pintar de verde para que todo triminó colocado sobre o tabuleiro tenha pelo menos um quadrado verde.



Exercício 27. Em um tabuleiro 3×4 existem 6 pontos. Prove que entre eles existem dois pontos cuja distância entre eles não excede $\sqrt{5}$.

Exercício 28. Qual o menor número de quadrados de um tabuleiro 8×8 que devem ser pintados de verde, de modo que, em qualquer posição em que coloquemos a figura abaixo no tabuleiro, pelo menos um quadrado da peça não será verde?



Exercício 29. (Olimpíada Russa) Duzentos estudantes participaram de uma competição matemática. A prova possuía 6 problemas. Sabemos que cada problema foi resolvido corretamente por pelo menos 120 estudantes. Prove que existem dois participantes de modo que para qualquer problema, pelo menos um deles dois conseguiu uma solução correta.

Exercício 30. Umberto e Doisberto jogam em um tabuleiro $3 \times n$ colocando dominós sempre cobrindo duas casas adjacentes (com lado em comum) do tabuleiro. Umberto faz a primeira jogada, Doisberto faz a segunda e eles seguem jogando alternadamente. Perde o jogador que não conseguir jogar. Para cada um dos casos abaixo, diga quais dos jogadores pode bolar uma estratégia e sempre garantir a vitória independentemente de como o outro jogue.

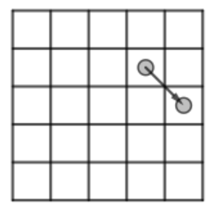
a) $n = 3$

b) $n = 4$

Exercício 31. (Rússia) Todo quadrado de um tabuleiro 100×100 é pintado com uma dentre 4 cores de modo que 25 existam exatamente 25 quadradinhos de cada cor em toda linha e coluna. Prove que podemos escolher duas colunas e duas linhas de modo que elas se intersectam em quatro quadradinhos de cores diferentes.

Exercício 32. (USAMO 2000) Qual é o número máximo de quadrados de um tabuleiro 1000×1000 podem ser escolhidos de modo que não existam dois deles numa mesma linha ou coluna?

Exercício 33. Em um tabuleiro 5×5, cada quadradinho possui uma peça em seu centro. O único movimento permitido para uma dessas peças e se deslocar para um quadradinho que compartilhe exatamente um vértice com o quadradinho em que ela está, como indicado na figura abaixo. Tanto é possível que várias peças ocupem um mesmo quadradinho quanto que um quadradinho fique vazio. Em um dado momento, todas as peças serão movidas simultaneamente. Qual o número mínimo de quadradinhos vazios poderão ser encontrados após esse momento?



Exercício 34. Dois grupos, cada um formado por 7 membros, irão disputar um torneio de xadrez em que um participante de cada grupo joga apenas contra participantes do outro grupo.

a) Prove que após a realização de 22 jogos nesse torneio é possível encontrarmos 4 participantes que podem ser sentados em uma mesa de modo que cada par de vinzinhos já tenha disputado uma partida no torneiro.

b) Exiba um exemplo de 21 jogos entre eles em que isso não ocorre.

Exercício 35. (OBM 2016) Janaína quer pintar as casas de um tabuleiro 7×7 de vermelho, de azul ou de marrom, da seguinte maneira: em cada linha, o número de casas vermelhas não pode ser menor que o número de casas com cada uma das outras cores e, em cada coluna, o número de casas azuis não pode ser menor que o número de casas com cada uma das outras cores. Todas as linhas e colunas devem conter casas das três cores.

a) Pelo menos quantas casas serão pintadas de vermelho?

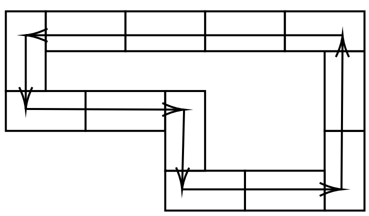
b) Quantas casas serão pintadas de marrom?

Exercício 36. Alguns números reais estão escritos nas casas de um tabuleiro $n \times n$ de modo que a soma total dos números escritos é positiva. Mostre que existe alguma permutação das colunas do tabuleiro, de modo que a soma dos números escritos nas casas da diagonal principal do novo tabuleiro seja positiva.

Exercício 37. (Torneio das Cidades) Em um tabuleiro 5×5, João deve desenhar segmentos de reta ligando vértices opostos dos quadrados 1×1 de modo que quaisquer dois segmentos desenhados não possuam pontos em comum (incluindo seus vértices). Qual o número máximo de tais segmentos que podem ser desenhados por João?

Exercício 38. (OBM 2002) Numeramos as casas de um tabuleiro quadriculado $m \times n$, onde $m, n \geq 2$, com os inteiros $1, 2, 3, \ldots, mn$ de modo que, para todo $i \leq mn$–1, as casas i e $i+1$ tenham um lado em comum. Prove que existe $i \leq mn - 3$ tal que as casas i e $i+3$ têm um lado em comum.

Exercício 39. Um tabuleiro 2018×2018 foi coberto completamente, sem sobreposição, por dominós 2×1. De um dado um quadrado, um robô caminhará para o outro quadrado do dominó e, em seguida, dá um passo a mais na mesma direção, entrando assim em um novo dominó. Daí em diante ele repetirá esse modo de caminhar.



É possível que o robô continue seu movimento de modo perpétuo sem sair do tabuleiro?