Chicken Mc'Nuggets

Semana Olímpica 2021 - Teresina - PI

Rafael Filipe - rafaelfilipedoss@gmail.com

Neste material vamos revisar algumas ferramentas básicas de Teoria dos Números e veremos como podem ser aplicadas em problemas difíceis. No final o nome do material fará um pouco mais de sentido.

1 Divisão Euclidiana

Vamos começar relembrando a divisão euclidiana:

Teorema 1.1. (Divisão Euclidiana) Sejam a e b inteiros, com $b \neq 0$. Então existe um único par de inteiros (q, r) tal que

- $0 \leq r < |b|$;
- $a = bq + r$ para algum $q \in \mathbb{Z}$.

Os números q e r são chamados *quociente* e *resto* da divisão de a por b, respectivamente.

Dessa forma, o resto da divisão é sempre não negativo, por definição. Então, por exemplo, apesar de termos $-15 = 4 \times (-3) - 3$, o resto da divisão de -15 por 4 é 1, pois devemos olhar para $-15 = 4 \times (-4) + 1$. O termo bq é o maior múltiplo de b menor ou igual a n. Nesse exemplo, $bq = -16$.

2 Teorema de Bézout

Teorema 2.1. Sejam a e b números inteiros. Então existem inteiros x, y tais que

$$ax + by = \text{mdc}(a, b).$$

Demonstração: Considere $C = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ e seja $d = ax_0 + by_0$ o menor elemento positivo de C. Note que $\text{mdc}(a, b) \mid d$ é então $\text{mdc}(a, b) \leq d$.

Mostremos que d divide qualquer elemento de C. De fato, se $ax + by = dq + r$, com $0 < r \leq d - 1$, então $r = a(x - qx_0) + b(y - qy_0)$, o que implica que $r \in C$, o que contradiz a minimalidade de d. Logo, temos $r = 0$. Como a e b estão em C, temos que d é um divisor comum de a e b e então $d \leq \text{mdc}(a, b)$.

Portanto, $ax_0 + by_0 = \text{mdc}(a, b)$, como queríamos. □

O teorema vale para mais variáveis. A demonstração é análoga!

Teorema 2.2. Sejam $a_1, a_2, ..., a_m$ inteiros. Então existem inteiros $x_1, x_2, ..., x_m$ tais que

$$\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = \mathrm{mdc}(a_1, a_2, \cdots, a_m).$$

Provavelmente você já conhece o teorema de Bézout, mas pode ser que não tenha utilizado muito em problemas. Vejamos alguns exemplos de como a aplicação pode ser bastante interessante.

Exemplo 2.3. (IMO SL 2012) Um conjunto de inteiros A é *admissível* se possui a seguinte propriedade: se $x, y \in A$ (possivelmente $x = y$), então $x^2 + kxy + y^2 \in A$ para todo inteiro k. Determine todos os pares de inteiros não nulos m, n tais que o único conjunto admissível contendo m e n é o conjunto dos números inteiros.

Solução: Se $\mathrm{mdc}(m, n) = d \neq 1$, então $A = \{dk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ é admissível, pois se x, y são múltiplos de d, então $x^2 + kxy + y^2$ também é múltiplo de d e, portanto, pertence a A.

Mostremos agora se $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$, então o único conjunto admissível é o conjunto dos inteiros. Seja $P(x, y, k)$ a propriedade e A um conjunto admissível contendo m e n. Temos que

$$P(m, m, k-2) \Rightarrow km^2 \in A \quad \text{e} \quad P(n, n, k-2) \Rightarrow kn^2 \in A.$$

Logo, A contém todos os múltiplos de m^2 e n^2. Como $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$, também temos $\mathrm{mdc}(m^2, n^2) = 1$ e, pelo teorema de Bézout, existem inteiros a e b tais que $am^2 + bn^2 = 1$. Portanto, temos que

$$P(am^2, bn^2, 2) \Rightarrow a^2m^4 + 2abm^2n^2 + b^2n^4 = (am^2 + bn^2)^2 = 1 \in A.$$

Finalmente, segue que

$$P(1, 1, k-2) \Rightarrow k \in A$$

e então, como k é qualquer, A é o conjunto dos números inteiros.

Exemplo 2.4. (Putnam 2000) Prove que a expressão

$$\frac{\gcd(m, n)}{n}\binom{n}{m}$$

é inteiro para todos os pares de inteiros $n \geq m \geq 1$.

Solução: Pelo teorema de Bézout, existem inteiros x, y tais que $mx + ny = \mathrm{mdc}(m, n)$. Logo, temos que

$$\frac{\gcd(m, n)}{n}\binom{n}{m} = \frac{mx + ny}{n}\binom{n}{m} = y\binom{n}{m} + x \cdot \frac{m}{n}\binom{n}{m} = y\binom{n}{m} + x\binom{n-1}{m-1}$$

é um número inteiro. □

Exemplo 2.5. (IMO TST 2014 - Brasil) Para m e n primos entre si, determine os possíveis valores de

$$\mathrm{mdc}(5^m + 7^m, 5^n + 7^n).$$

Solução: Seja $\mathrm{mdc}(5^m + 7^m, 5^n + 7^n) = d$. Note que $\mathrm{mdc}(d, 5) = \mathrm{mdc}(d, 7) = 1$. Além disso, temos que

$$7^m \equiv -5^m \pmod{d} \quad \text{e} \quad 7^n \equiv -5^n \pmod{d}.$$

Pelo teorema de Bézout, existem inteiros x, y tais que $mx + ny = 1$. Portanto:

$$7 = 7^{mx+ny} = (7^m)^x(7^n)^y \equiv (-5^m)^x(-5^n)^y \equiv (-1)^{x+y}5^{mx+ny} = \pm 5 \pmod{d}.$$

Note que x e y podem ser negativos, mas como 5 e 7 são inversíveis, não há problema. Portanto, $d \mid 12$.

Se m e n são ímpares, então $12 \mid 5^m + 7^m$ e $12 \mid 5^n + 7^n$. Logo, $\text{mdc}(5^m + 7^m, 5^n + 7^n) = 12$.

Suponha então m e n com paridades diferentes, digamos m par e n ímpar. Então, $3 \nmid 5^m + 7^m$, já que quadrados perfeitos não divisíveis por 3 sempre deixam resto 1 na divisão por 3 e, analogamente, $4 \nmid 5^m + 7^m$, já quadrados perfeitos ímpares deixam resto 1 na divisão por 4. Logo, temos $\text{mdc}(5^m + 7^m, 5^n + 7^n) = 2$.

Portanto, $\text{mdc}(5^m + 7^m, 5^n + 7^n)$ só pode ser 2 ou 12.

3 Equações Diofantinas Lineares

Uma equação diofantina é qualquer equação polinomial em que procuramos soluções inteiras ou racionais.

O exemplo mais simples é o caso linear. Uma *equação diofantina linear* é qualquer equação da forma

$$ax + by = c,$$

em que a, b, c são inteiros fixados e x, y são os inteiros que queremos encontrar.

Teorema 3.1. Sejam a, b, c inteiros. A equação $ax + by = c$ possui solução, se e somente se, $\text{mdc}(a, b)$ divide c.

Demonstração: $\Rightarrow$) Suponha que a equação possua solução. Então, como $ax + by$ é uma combinação linear de a e b, temos que $\text{mdc}(a, b)$ divide $ax + by = c$.

$\Leftarrow$) Suponha agora que $\text{mdc}(a, b) \mid c$, ou seja, $c = \text{mdc}(a, b) \cdot k$. Pelo teorema de Bézout, existem inteiros x e y tais que $ax_0 + by_0 = \text{mdc}(a, b)$. Então:

$$ax_0 + by_0 = \text{mdc}(a, b) \Rightarrow a(kx_0) + b(ky_0) = \text{mdc}(a, b) \cdot k \Rightarrow a(kx_0) + b(ky_0) = c.$$

Portanto, a equação $ax + by = c$ tem solução $(x, y) = (kx_0, ky_0)$. □

O corolário abaixo nos fornece o método geral para resolver equações diofantinas lineares.

Corolário 3.2. Sejam a, b, c inteiros tais que $\text{mdc}(a, b)$ divide c. Então, sendo (x_0, y_0) uma solução qualquer de $ax + by = c$, então todas as soluções da equação $ax + by = c$ são dadas por

$$x = x_0 - \frac{b}{\text{mdc}(a, b)} \cdot t \quad \text{e} \quad ty = y_0 + \frac{a}{\text{mdc}(a, b)} \cdot t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração: Como $\text{mdc}(a, b)$ divide c, de fato os inteiros x_0 e y_0 existem. Logo, sendo x, y uma outra solução, temos que

$$ax_0 + by_0 = ax + by \Rightarrow a(x_0 - x) = b(y - y_0) \Rightarrow \frac{a}{\text{mdc}(a, b)} \cdot (x_0 - x) = \frac{b}{\text{mdc}(a, b)} \cdot (y - y_0).$$

Como $\text{mdc}\left(\frac{a}{\text{mdc}(a,b)}, \frac{b}{\text{mdc}(a,b)}\right) = 1$, a igualdade acima implica que $\frac{a}{\text{mdc}(a,b)} \mid y - y_0$ e $\frac{b}{\text{mdc}(a,b)} \mid x_0 - x$.

Portanto, segue que $y - y_0 = \frac{a}{\text{mdc}(a,b)} \cdot t$ e $x_0 - x = \frac{b}{\text{mdc}(a,b)} \cdot t$, para algum $t \in \mathbb{Z}$, e então

$$x = x_0 - \frac{b}{\text{mdc}(a, b)} \cdot t \quad \text{e} \quad ty = y_0 + \frac{a}{\text{mdc}(a, b)} \cdot t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

como queríamos. □

Exemplo 3.3. Quantas triplas de inteiros positivos (a, b, c) satisfazem a equação $2a + 3b + 5c = 1000$?

Solução: Podemos pensar na equação como uma diofantina linear da forma $2(a + c) + 3(b + c) = 1000$. Note que $a + c = 500$ e $b + c = 0$ é uma solução. Portanto, pelo **corolário 4.2**, temos que

$$a + c = 500 - 3t \quad \text{e} \quad b + c = 2t.$$

Como a, b, c são inteiros positivos, devemos ter $1 \leq c \leq \min\{499 - 3t, 2t - 1\}$. Escolhido o valor de c nesse intervalo, a e b ficam determinados. Logo, para cada t, temos exatamente $\min\{499 - 3t, 2t - 1\}$ triplas (a, b, c). Temos que $2 \leq 500 - 3t \leq 497 \Rightarrow 1 \leq t \leq 166$. Portanto, queremos calcular

$$\sum_{t=1}^{166} \min\{499 - 3t, 2t - 1\}.$$

Note que $2t - 1 \geq 499 - 3t \iff t \geq 100$. Portanto, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{166} \min\{499 - 3t, 2t - 1\} &= \sum_{t=1}^{99} (2t - 1) + \sum_{t=100}^{166} (499 - 3t) \\
&= 2(1 + 2 + \cdots + 99) - 99 + 499 \cdot 67 - 3(100 + 101 + \cdots + 166) \\
&= 2 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} - 99 + 499 \cdot 67 - 3\left(\frac{166 \cdot 167}{2} - \frac{99 \cdot 100}{2}\right) = 16501.
\end{aligned}$$

Vamos agora relembrar o Algoritmo de Euclides.

Teorema 3.4. (Algoritmo de Euclides) Sejam a e b inteiros com $a = bq + r$, então $\mathrm{mdc}(a, b) = \mathrm{mdc}(b, r)$.

Demonstração: Se $d = \mathrm{mdc}(a, b)$, então podemos escrever $a = d \times a'$ e $b = d \times b'$ com $\mathrm{mdc}(a', b') = 1$. Logo, $r = a - bq = d \times (a' - b'q)$. Logo, d divide b e r. Portanto, d divide $t = \mathrm{mdc}(b, r)$. Analogamente, temos que $b = t \times b''$ e $r = t \times r''$ com $\mathrm{mdc}(b'', r'') = 1$. Logo, $a = bq + r = t \times (b''q + r'')$. Então, t divide a e, como t divide b, temos que t divide $d = \mathrm{mdc}(a, b)$. Portanto, d divide t e t divide d. Isso nos diz que $d = t \Rightarrow \mathrm{mdc}(a, b) = \mathrm{mdc}(b, r)$.

Corolário 3.5. Sejam a e b inteiros. Então $\mathrm{mdc}(a, b) = \mathrm{mdc}(b, a - kb)$.

O algoritmo de Euclides nos mostra que não precisamos fatorar números para calcular o mdc, basta fazer divisões sucessivas (ou subtrações, se pensarmos no corolário). Isso é interessante principalmente para números muito grandes, em que é difícil determinar a fatoração.

Exemplo 3.6. Calcule $\mathrm{mdc}(2021, 371)$.

Solução: Temos que

$$\begin{aligned}
2021 &= 371 \cdot 5 + 166 \\
371 &= 166 \cdot 2 + 39 \\
166 &= 39 \cdot 4 + 10 \\
39 &= 10 \cdot 3 + 9 \\
10 &= 9 \cdot 1 + 1 \\
9 &= 9 \cdot 1 + 0
\end{aligned}$$

Logo, o mdc é o último resto não nulo, ou seja, $\mathrm{mdc}(2021, 371) = 1$.

Para achar as soluções de uma equação diofantina linear precisamos de uma solução particular. Para números pequenos em geral é simples chutar uma solução. Porém, para números grandes, você pode tentar utilizar congruência modular para ir reduzindo os números, mas o processo pode ser bem trabalhoso.

Podemos adaptar as divisões sucessivas do algoritmo de Euclides para achar soluções particulares. Vejamos:

Exemplo 3.7. Ache uma solução para a equação $2021x + 371y = 1$.

Solução: Isolando os restos nas divisões sucessivas, temos que

$$\begin{aligned}166 &= 2021 - 371 \cdot 5\\ 39 &= 371 - 166 \cdot 2\\ 10 &= 166 - 39 \cdot 4\\ 9 &= 39 - 10 \cdot 3\\ 1 &= 10 - 9 \cdot 1\end{aligned}$$

A última divisão nos fornece 1 como combinação de 10 e 9. Da penúltima divisão, temos $9 = 39 - 10 \cdot 3$. Logo, substituindo na última, temos que

$$1 = 10 - (39 - 10 \cdot 3) \cdot 1 \Rightarrow 1 = 10 \cdot 4 - 39 \cdot 1$$

A terceira divisão nos fornece $10 = 166 - 39 \cdot 4$. Logo, substituindo no que achamos acima, temos

$$1 = (166 - 39 \cdot 4) \cdot 4 - 39 \cdot 1 \Rightarrow 1 = 166 \cdot 4 - 39 \cdot 17.$$

A segunda divisão nos fornece $39 = 371 - 166 \cdot 2$. Portanto, repetindo o procedimento acima, obtemos

$$1 = 166 \cdot 4 - (371 - 166 \cdot 2) \cdot 17 \Rightarrow 1 = 166 \cdot 38 - 371 \cdot 17.$$

Finalmente, da primeira divisão, temos $166 = 2021 - 371 \cdot 5$. Logo, substituindo no que achamos acima, obtemos

$$1 = (2021 - 371 \cdot 5) \cdot 38 - 371 \cdot 17 \Rightarrow\Rightarrow 1 = 2021 \cdot 38 - 371 \cdot 207.$$

Portanto, uma solução particular para a equação $2021x + 371y = 1$ é $(x, y) = (38, -207)$.

4 Chicken McNuggets

Finalmente chegamos no principal resultado deste material. Supostamente o nome deste teorema vem devido à seguinte história: originalmente, o McDonald's vendia nuggets em caixas de 9 ou 20. Certo dia, alguns amigos matemáticos se perguntaram qual seria a maior quantidade de nuggets que eles não conseguiriam comprar. A resposta é 151, devido ao seguinte resultado:

Teorema 4.1. (Chicken McNuggets) Sejam a e b inteiros positivos primos entre si. Então, $ab - a - b$ é o maior inteiro que não pode ser escrito na forma $ax + by$ com x, y inteiros não negativos.

Demonstração: Mostremos primeiramente que todo $c > ab - a - b$ pode ser representado. Sabemos que a equação $ax + by = c$ admite alguma solução, já que mdc$(a, b) = 1 \mid c$. Logo, pelo **corolário 3.2**, podemos escrever

$$x = x_0 - bt \quad e \quad y = y_0 + at,$$

para algum par de inteiros (x_0, y_0). Como queremos x, y inteiros não negativos, queremos achar um t tal que

$$x = x_0 - bt > -1 \quad \text{e} \quad y = y_0 + at > -1 \iff \frac{x_0 + 1}{b} > t > \frac{-y_0 - 1}{a}.$$

Agora note que o intervalo $\left(\frac{-y_0-1}{a}, \frac{x_0+1}{b}\right)$ tem tamanho

$$\frac{x_0 + 1}{b} - \frac{-y_0 - 1}{a} = \frac{ax_0 + by_0 + a + b}{ab} = \frac{c + a + b}{ab} > 1,$$

de modo que há pelo menos um número inteiro neste intervalo. Logo, tomando k como sendo um inteiro nesse intervalo, encontramos uma solução (x, y) com inteiros não negativos.

Vamos mostrar agora que para para $c = ab - a - b$ não tem solução. Suponha que existam $x, y \geq 0$ tais que

$$ax + by = ab - a - b \Rightarrow a(b - x - 1) = b(y + 1).$$

Se $y \geq 0$, temos que $b(y + 1) > 0 \Rightarrow b - x - 1 > 0$. Logo, $0 < b - x - 1 < b$. Porém, como mdc$(a, b) = 1$, a igualdade acima nos diz que $b \mid b - x - 1$, um absurdo, já que não há múltiplos de b no intervalor $(0, b)$. Portanto, não há solução para $c = ab - a - b$ e concluímos o desejado. ☐

Exemplo 4.2. (OBM 2009) Prove que existe um inteiro positivo n_0 com a seguinte propriedade: para cada inteiro $n \geq n_0$ é possível particionar um cubo em n cubos menores.

Solução: É fácil dividir um cubo em 8 cubinhos. Da mesma forma, é fácil dividir em 27 cubinhos. Considere um cubo não dividido. A cada passo, realizamos então uma das seguintes operações:

- Escolhemos um dos cubinhos nos quais o cubo original está dividido e o divididimos em 8 cubinhos menores, aumentando a quantidade de cubos em $8 - 1 = 7$ cubinhos novos;
- Escolhemos um dos cubinhos nos quais o cubo original está dividido e o divididimos em 27 cubinhos menores, aumentando a quantidade de cubos $27 - 1 = 26$ cubinhos novos.

Portanto, conseguimos particionar o cubo original em quantidades de cubinhos da forma $1 + 7m + 26n$, para m, n inteiros não negativos.

Por Chicken McNuggets, como mdc$(7, 26) = 1$, conseguimos representar na forma $7m + 26n$ qualquer número maior ou igual a $26 \cdot 7 - 26 - 7 + 1 = 150$. Portanto, conseguimos gerar qualquer quantidade maior ou igual a $1 + 150 = 151$ e então $n_0 = 151$ satisfaz o enunciado. ☐

Para cada par de inteiros a e b primos entre si, podemos determinar também quantos números não podem ser representados na forma $ax + by$.

Teorema 4.3. Sejam a, b inteiros positivos primos entre si. Então existem exatamente $\frac{(a-1)(b-1)}{2}$ inteiros positivos que não podem ser expressões na forma $ax + by$, com x, y inteiros não negativos.

Demonstração: Se $a = 1$ ou $b = 1$, não há o que provar. Suponha então $a, b > 1$. Como $\text{mdc}(a, b) = 1$, por Chicken McNuggets, temos que todo número maior que $ab - a - b$ pode ser representado na forma $ax + by$ com x, y não negativos. Logo, os inteiros positivos que não podem ser representados na forma $ax + by$ pertencem ao conjunto $C = \{0, 1, 2, \cdots, ab - a - b\}$. Seja N a quantidade de números que não podem ser representados nessa forma.

Note que se $ax + by \in C$, com $x, y \geq 0$, então $0 \leq x \leq b - 2$ e $0 \leq y \leq a - 2$. Sendo $a(x + 1) = bq_x + r_x$, com $0 \leq r_x \leq b - 1$, temos $0 \leq by \leq ab - a - b - ax = b(a - 2 - q_x) + b - r_x \Rightarrow 0 \leq y \leq a - q_x - 2$. Logo, para cada x, há $(a - q_x - 2) + 1 = a - q_x - 1$ valores para y. Portanto:

$$N = ab - a - b + 1 - \sum_{x=0}^{b-2}(a - q_x - 1) = \sum_{x=0}^{b-2} q_x.$$

Agora note que $\{a, 2a, \cdots, (b-1)a\}$ forma um sistema completo de resíduos não nulos módulo b, pois $\text{mdc}(a, b) = 1$. Logo, temos $\{r_1, r_2, \cdots, r_{b-2}\} = \{1, 2, \cdots, b - 1\}$ em alguma ordem. Temos então que

$$N = \sum_{i=0}^{b-2} q_x = \sum_{i=0}^{b-2} \frac{a(x + 1) - r_x}{b} = \frac{a(b - 1)}{2} - \frac{1}{b}\sum_{i=0}^{b-2} r_x = \frac{a(b - 1)}{2} - \frac{1}{b} \cdot \frac{b(b - 1)}{2} = \frac{(a - 1)(b - 1)}{2},$$

como queríamos. □

5 Problemas

1. (Cone Sul 2016) Para cada $k = 1, 2, \ldots$ seja s_k o número de pares (x, y) satisfazendo a equação $kx + (k + 1)y = 1001 - k$ com x, y inteiros não negativos. Determine $s_1 + s_2 + \cdots + s_{200}$.

2. (RMM 2009) Para $a_i \in \mathbb{Z}^+$, $i = 1, \ldots, k$, e $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$, seja $d = \text{mdc}(a_1, \ldots, a_k)$ o maior divisor comum de $a_1, \ldots, a_k$. Prove que $\frac{d}{n} \cdot \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k}(a_i!)}$ é inteiro.

3. (Suíça TST 2019) Prove que para todo inteiro positivo n existem inteiros positivos a, b tais que

$$n \mid 4a^2 + 9b^2 - 1.$$

4. (Irã 2017) Sejam x e y inteiros p um número primo. Suponha que existam inteiros positivos primos entre si m e n tais que

$$x^m \equiv y^n \pmod{p}.$$

Prove que existe um único inteiro z módulo p tal que

$$x \equiv z^n \pmod{p} \quad \text{and} \quad y \equiv z^m \pmod{p}.$$

5. (São Petesburgo 2016) Sejam p e q números primos distintos tais que um deles é menos de duas vezes o outro. Prove que existem dois naturais consecutivos, tais que o maior fator primo de um deles é p e o maior fator primo do outro é q.

6. (IMO 1983) Sejam a, b e c inteiros positivos, dois a dois primos entre si. Mostre que $2abc - ab - bc - ca$ é o maior inteiro que não pode ser escrito na forma $xbc + yca + zab$, em que x, y, z são inteiros não negativos.

7. (AIME 2019) Determine a soma de todos os inteiros positivos n tais que, dada uma quantidade ilimitada de moedas de 5, n e $n+1$ centavos, a quantia de 91 centavos é a maior quantidade que não pode ser obtida.

8. (IMO SL 1997) Uma progressão aritmética infinita cujos termos são inteiros positivos contém o quadrado de um inteiro e o cubo de um inteiro. Prove que ela contém a sexta potência de um inteiro.

9. (Índia TST 2003) Na reta real, pintamos de vermelho todos os pontos correspondentes a inteiros da forma $81x + 100y$, em que x e y são inteiros positivos. Pintamos os pontos restantes de azul. Determine um ponto P na reta real tal que, para todo ponto inteiro T, a reflexão de T com respeito a P é um inteiro pintado com a cor diferente da cor de T.

10. (Komal) Seja S um conjunto finito de números racionais. Para cada inteiro positivo k, seja $b_k = 0$ se podemos selecionar k (não necessariamente distintos) números em S cuja soma seja 0, e $b_k = 1$ caso contrário. Prove que o número $0, b_1 b_2 b_3 \dots$ é racional. O resultado continua válido se S for infinito?

11. (APMO 2018) Uma coleção de n quadrados no plano é chamada tri-conectada se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) Todos os quadrados são congruentes;

(ii) Se dois quadrados possuem um ponto P em comum, então P vértice de cada um dos quadrados;

(iii) Cada quadrado intersecta exatamente três outros quadrados.

Quantos são os inteiros positivos n, com $2018 \leq n \leq 3018$, para o qual existe uma coleção tri-conectada com n quadrados?

12. (OBM 2019) Prove que existe um inteiro positivo m para o qual existe um inteiro positivo n_m tal que para todo inteiro positivo $n \geq n_m$, existem inteiros positivos $a_1, a_2, \dots, a_n$ tais que

$$\frac{1}{a_1^m} + \frac{1}{a_2^m} + \dots + \frac{1}{a_n^m} = 1.$$

13. (USAMO 2001) Seja S um conjunto de inteiros (não necessariamente positivos) tais que

(a) existem $a, b \in S$ com $\gcd(a, b) = \gcd(a-2, b-2) = 1$;

(b) se x e y são elementos de S (possivelmente iguais), então $x^2 - y$ também pertence a S.

Prove que S é o conjunto de todos os inteiros.

6 Referências

[1] *Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*, BROCHERO, Fábio; et al. IMPA, 2013.