Problemas Clássicos de Polinômios

Semana Olímpica, 2021- Níveis 2 e 3

George Lucas

Seção Aquecimento

1. Se o polinômio $P(x)$ de grau 9 tem a seguinte propriedade $P(k) = \frac{1}{k(k+1)}$ para $k = 1,2, \dots ,10$, determine $P(11)$.

2. Sabendo que a, b, c, d são raízes da equação $x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 7x - 9 = 0$, calcule o valor da expressão $(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)(1 + d^2)$.

3. Um certo polinômio $p(x)$ quando dividido por $x - a, x - b, x - c$ deixa restos a, b, c , respectivamente. Determine o resto da divisão de $p(x)$ por $(x - a)(x - b)(x - c)$.

4. Seja P um polinômio de grau 2021 tal que $P(i) = 2^i$ para $i = 0,1, \dots ,2021$. Calcule $P(2022)$.

5. Dado o sistema:
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2^2 - 1^2} + \dfrac{y^2}{2^2 - 3^2} + \dfrac{z^2}{2^2 - 5^2} = 1 \\ \dfrac{x^2}{4^2 - 1^2} + \dfrac{y^2}{4^2 - 3^2} + \dfrac{z^2}{4^2 - 5^2} = 1 \\ \dfrac{x^2}{6^2 - 1^2} + \dfrac{y^2}{6^2 - 3^2} + \dfrac{z^2}{6^2 - 5^2} = 1 \end{cases}$$
Calcule $x^2 + y^2 + z^2$.

6. Seja $P(x)$ um polinômio quadrático com coeficientes reais tais que $P(11) = 181$ e $x^2 - 2x + 2 \leq P(x) \leq 2x^2 - 4x + 3$ para qualquer número real x. Encontre P.

7. Se $a > 0$ e P um polinômio de coeficientes inteiros que satisfaz
$$P(1) = P(3) = P(5) = P(7) = a$$
$$P(2) = P(4) = P(6) = P(8) = -a$$
Determine o menor valor possível de a.

8. Sejam a, b, c as raízes da equação $x^3 + 3x^2 + 5x + 7 = 0$. Considere o polinômio P de grau 3 satisfazendo:

$$\begin{cases} P(a) = b + c \\ P(b) = a + c \\ P(c) = b + a \end{cases}$$

E $P(a + b + c) = 16$. Calcule $P(0)$.

Seção Olímpica

1. (OBM) Calcule o valor numérico abaixo em sua forma fechada.

$$\frac{(2^4 + 2^2 + 1)(4^4 + 4^2 + 1)(6^4 + 6^2 + 1) \dots (32^4 + 32^2 + 1)}{(1^4 + 1^2 + 1)(3^4 + 3^2 + 1)(5^4 + 5^2 + 1) \dots (31^4 + 31^2 + 1)}$$

2. (OMERJ) Encontre todos os valores reais que a pode assumir de modo que o sistema

$$\begin{cases} x^3 + y^2 + z^2 = a \\ x^2 + y^3 + z^2 = a \\ x^2 + y^2 + z^3 = a \end{cases}$$

Possui solução com x, y, z reais distintos dois a dois.

3. (CIIM) Sejam $\alpha < 0 < \beta$ números reais e considere o polinômio $f(x) = x(x - \alpha)(x - \beta)$. Seja S o conjunto dos números reais s tal que o polinômio $f(x) - s$ tenha todas as suas raízes reais. Para $s \in S$, seja $P(s)$ o produto da menor e da maior raiz de $f(x) - s$. Determine o menor valor possível de $P(s)$ ao variar $s \in S$. Para que valores de s esse mínimo é atingido?

4. (Turquia) Uma sequência de números reais $a_0, a_1, \dots$ satisfaz a condição

$$\sum_{n=0}^{m} a_n (-1)^n \binom{m}{n} = 0$$

Para todo m suficientemente grande. Prove que existe um polinômio P tal que $a_n = P(n)$ para todo inteiro não-negativo n.

5. (a) Prove que todo polinômio P de coeficientes reais e de grau $n \geq 0$ pode ser escrito na forma

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \binom{x}{k}$$

Onde $a_k \in \mathbb{R}$ para todo k, e $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e k inteiro positivo e $\binom{x}{0} = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Seja

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \binom{x}{k}$$

Prove que $P(t) \in \mathbb{Z}$ para todo $t \in \mathbb{Z}$ se, e somente se, $a_k \in \mathbb{Z}$ para todo k.

6. Determine todos os polinômios P tais que
$$P(x)^2 - 2 = 2P(2x^2 - 1)$$
Para todo real x.

7. Encontre todos os pares de polinômios (f, g), com coeficientes inteiros, tais que
$$f(g(x)) = x^{2015} + 2x + 1$$

8. Seja $n > 1$ um inteiro positivo. Sejam $t_1, t_2, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{Q}$ tais que
$$\sum_{j=1}^{n-1} t_j \sqrt[n]{2021}^j \in \mathbb{Q}$$
Prove que $t_1 = t_2 = \cdots = t_{n-1} = 0$.

9. Se um polinômio P de coeficientes reais satisfaz que para todo $x \in \mathbb{R}$
$$P(sen(x)) = P(cos(x))$$
Prove que existe um polinômio Q de coeficientes reais tal que
$P(x) = Q(x^4 - x^2)$.

10. (IMO) Encontre todos os polinômios $P(x)$ com coeficientes reais que satisfaz a igualdade
$$P(a - b) + P(b - c) + P(c - a) = 2P(a + b + c)$$
Para todas as triplas (a,b,c) de números reais tais que $ab + bc + ca = 0$.

11. Sejam P e Q polinômios de coeficientes reais, ambos de grau ímpar, satisfazendo para todo real x
$$P(1 + x + Q(x)^2) = Q(1 + x + P(x)^2)$$
Prove que $P \equiv Q$.

12. Seja λ um número real positivo satisfazendo $\lambda = \lambda^{2/3} + 1$. Prove que existe um inteiro positivo M tal que $|M - \lambda^{300}| < 4^{-100}$.

13. (OIM) Determine todos os polinômios P(x) com coeficientes reais tais que $P(2014) = 1$ e, para algum inteiro c,
$$xP(x - c) = (x - 2014)P(x)$$

14. (OBM) Dizemos que um polinômio é positivista se ele pode ser escrito como o produto de dois polinômios não-constantes com coeficientes reais não-negativos. Seja $f(x)$ um polinômio não-nulo de grau maior que 1 tal que $f(x^n)$ é positivista para algum inteiro positivo n. Prove que $f(x)$ é positivista.

15. (IMO) Seja $P_1(x) = x^2 - 2$ e $P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x))$ para $j = 2,3, \dots$. Prove que para qualquer inteiro positivo n as raízes da equação $P_n(x) = x$ são todas reais e distintas.

16. (IMO SL) Prove que existem infinitos inteiros positivos n tais que o maior divisor primo de $n^4 + n^2 + 1$ é igual ao maior divisor primo de $(n+1)^4 + (n+1)^2 + 1$.

17. (IMO SL) Encontre todos os polinômios $f(x)$ com coeficientes reais que satisfazem
$$f(x)f(2x^2) = f(2x^3 + x)$$

18. (IMO SL) Seja $f(x) = \frac{x^2+1}{2x}$ para $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Defina $f^0(x) = x$ e para todo inteiro positivo n $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$. Prove que para todo $x \neq -1,0,1$ e n inteiro não-negativo temos que
$$\frac{f^n(x)}{f^{n+1}(x)} = 1 + \frac{1}{f((\frac{x+1}{x-1})^{2^n})}$$

19. (CIIM) Sejam $r > s$ inteiros positivos. Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios não constantes de coeficientes reais tais que $P(x)^2 \not\equiv Q(x)^2$ e que satisfazem
$$P(x)^r - P(x)^s = Q(x)^r - Q(x)^s$$
Para todo real x. Prove que $r = 2$ e $s = 1$.

20. (OBM) Considere o polinômio $P(x) = 4x^2 + 12x - 3015$. Defina a sequência de polinômios $P_1(x) = \frac{P(x)}{2016}$ e $P_{n+1}(x) = \frac{P(P_n(x))}{2016}$ para todo inteiro positivo n.
    (a) Prove que existe um número real r tal que $P_n(r) < 0$ para todo inteiro positivo n.
    (b) Determine a quantidade de inteiros m tais que $P_n(m) < 0$ para infinitos inteiros positivos n.

21. Uma sequência infinita de polinômios $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots$ é definida por $P_0(x) = x$ e para todo n inteiro positivo
$$P_n(x) = P_{n-1}(x-1)P_{n-1}(x+1)$$
Determine o maior inteiro k para o qual o polinômio $P_{2014}(x)$ é múltiplo de x^k.

22. (IMO) A equação
$$(x-1)(x-2)\dots(x-2016) = (x-1)(x-2)\dots(x-2016)$$
É escrita no quadro, com 2016 fatores afins em cada lado. Qual o menor inteiro positivo k tal que é possível apagar exatamente k dentre esses 4032 fatores de modo que sobre pelo menos um fator em cada lado e a equação resultante não admita soluções reais?

23. Dado um real h seja, para todo real a, $a^{[0]} = 1$ e $a^{[n]} = a(a-h)(a-2h)\dots(a-(n-1)h)$ para todo inteiro positivo n.
Prove que
$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^{[n-m]} b^{[m]}$$

24. (IMC) Calcule o produto

$$\prod_{n=3}^{\infty} \frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}$$

25. (IMC) Determine todos os pares (P, Q) de polinômios mônicos de coeficientes complexos tal que $P(x)$ divide $Q(x)^2 + 1$ e $Q(x)$ divide $P(x)^2 + 1$.

26. (APMO) Sejam a, b, c, d, e, f números reais tais que o polinômio

$$p(x) = x^8 - 4x^7 + 7x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

tem todas as suas 8 raízes reais positivas. Determine os possíveis valores de f.

27. Existe uma função $f: \mathbb{N}^{2021} \to \mathbb{N}$ bijetiva? Em caso afirmativo, é possível que tal função f seja polinomial (um polinômio de 2021 variáveis)?

(Observação: $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos inteiros positivos)

Seção Hard Level

1. Seja p um primo ímpar e $S = \{x: x \in \{1,2, \dots, p-1\}$ tal que $x^k - 1$ não é múltiplo de p para todo k=1,2,...,p-2}. Seja s a soma dos elementos de S. Determine o inteiro r, $-\frac{p}{2} < r < \frac{p}{2}$, tal que $s - r$ é múltiplo de p.

2. Para cada inteiro positivo n, seja $c(n)$ o maior número real tal que
$$c(n) \leq \left| \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \right|$$
Para todas as triplas (f, a, b) satisfazendo
•f é um polinômio de grau n tal que $f(x)$ é inteiro para todo x inteiro.
•a e b são inteiros distintos e $f(a) \neq f(b)$.
Determine $c(n)$.

3. Determine se existem dois conjuntos distintos A e B, cada um consistindo de, no máximo, 2011^2 inteiros positivos e tais que para todo $x \in (0,1)$ é satisfeita a seguinte desigualdade:
$$\left| \sum_{a \in A} x^a - \sum_{b \in B} x^b \right| < (1-x)^{2011}$$