Problemas bonitos com soluções belas, o retorno!

Profa. Karol Borges

Semana Olímpica 2021 - Teresina-PI

1) Dado ABC um triângulo acutângulo, com O sendo seu circuncentro. O ponto H é o pé da perpendicular de A para a reta BC, e os pontos P e Q são os pés das perpendiculares de H para as retas AB e AC, respectivamente. Dado que $AH^2 = 2AO^2$, prove que os pontos O, P, Q são colineares.

2) Seja ABCD um trapézio com as bases AB e CD. As mediatrizes de AD e BC cruzam os segmentos BC e AD respectivamente nos pontos P e Q. Mostre que APD = BQC.

3) Seja $ABCDEF$ um hexágono inscrito em um círculo e sejam H, K e I os pontos de interseção de AB e ED, BC e FE, e AF e CD, respectivamente. Prove que H, K e I são colineares.

4) Seja ABC um triângulo, e seja M o ponto médio de BC. Sendo I_b e I_c os incentros de AMB e AMC, prove que a segunda interseção dos circuncírculos de ABI_b e ACI_c distinto de A pertence a reta AM.

5) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, seja E a interseção das bissetrizes dos ângulos $\angle B$ e $\angle C$. Dado F a interseção das retas BA e CD, prove que se $AB + CD = BC$, então A, D, E, F são concíclicos.

6) As circunferências c_1 e c_2 são tangentes interiormente a circunferência c nos pontos A e B, respectivamente. A tangente interior comum a c_1 e c_2 toca as circunferências em P e Q, respectivamente. Demostre que as retas AP e BQ cortam a circunferência c em pontos diametralmente opostos.

7) Duas circunferências são tangentes internamente entre si no ponto A. Uma secante intersecta as circunferências nos pontos M, N, P e Q, nessa ordem. Prove que $\angle MAP = \angle NAQ$.

8) Sejam A, B, C, D pontos distintos em uma reta, nesta ordem. As circunferências K_1 e K_2 de diâmetros AC e BD se intersectam em X e Y. O é um ponto arbitrário da reta XY, não situado em AD. CO intersecta K_1 novamente em M, e BO intersecta K_2 novamente em N. Prove que AM, DN e XY são concorrentes.

9) Seja ABC um triângulo agudo com $AB = AC$, seja D o ponto médio do lado AC e seja γ a circunferência do triângulo ABD. A tangente de γ em A intersecta a reta BC em E. Seja O o circuncentro do triângulo ABE. Prove que o ponto médio do segmento AO está em γ