Sequências

Carlos Shine

1 Algumas ideias importantes

- Tente "telescopar" sequências manipulando as equações ou desigualdades.
- Se necessário, introduza novas sequências, como $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ou $d_n = a_{n+1} - a_n$. Transformações como $b_n = 1/a_n$ também podem funcionar.
- Usar indução também pode ser uma boa ideia; estude casos pequenos (e até não tão pequenos!)
- Se houver multiplicações nas contas, isole o que é constante, obtendo uma conta do tipo $f(n) = c$ e faça $f(n+1) = f(n)$ para tentar fatorar.
- Em problemas do tipo "construa uma sequência em que todos os inteiros aparecem mais uma condição", construa a sequência dois termos de cada vez; um termo satisfaz uma condição, e o outro termo garante que todos os inteiros aparecem.
- Recursões lineares homogêneas de grau 2: se $a_n = ba_{n-1} + ca_{n-2}$ para b, c constantes, sejam α e β as raízes de $x^2 - bx - c = 0$. Se $\alpha \neq \beta$ (podem ser complexas!) então $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ para constantes A e B que podem ser encontradas resolvendo um sistema com a_0 e a_1. Se $\alpha = \beta$ então $a_n = \alpha^n(A + Bn)$ para constantes A e B (que também são encontradas resolvendo um sistema).

2 Problemas

1. Seja p um primo e $a_1, a_2, \ldots$ uma sequência de inteiros positivos tais que

$$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 + p$$

para todo n inteiro positivo. Prove que a_{n+1} divide $a_n + a_{n+2}$ para todo inteiro positivo n.

2. A sequência $\{x_n\}_n$ é definida por $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_{k+1} = x_k^2 + x_k$. Seja:

$$A = \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \cdots + \frac{1}{x_{100} + 1}$$

Determine $\lfloor A \rfloor$, ou seja, o maior inteiro que é menor ou igual a A.

3. Dados reais $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_{2015} = 1$ com $x_{i+1} - x_i \le h$ para $1 \le i \le 2014$, prove que

$$\frac{1-h}{2} < \sum_{i=1}^{1007} x_{2i}(x_{2i+1} - x_{2i-1}) < \frac{1+h}{2}.$$

4. Uma sequência de polinômios é definida por $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = 1 + x$ e

$$(k+1)f_{k+1}(x) - (x+1)f_k(x) + (x-k)f_{k-1}(x) = 0, \quad k \ge 1.$$

Prove que $f_k(k) = 2^k$ para $k \ge 0$.

5. Sejam $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(b_n)_{n\geq 0}$ sequências de números reais satisfazendo $a_0 > \frac{1}{2}$, $a_{n+1} \geq a_n$ e $b_{n+1} = a_n(b_n + b_{n+2})$, para todo inteiro não negativo n. Prove que a sequência $(b_n)_{n\geq 0}$ é limitada.

6. A sequência de reais positivos $a_1, a_2, \ldots$ satisfaz

$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

para todo inteiro positivo k. Prove que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$ para todo $n \geq 2$.

7. A sequência de reais $a_1, a_2, \ldots$ é definida por $a_1 = 56$ e $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{a_n}$ para $n \geq 1$. Mostre que existe um inteiro k com $1 \leq k \leq 2002$ e $a_k < 0$.

8. Considerar uma sequência de números reais definida por:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Demonstrar que, qualquer que seja o número real positivo a_0, tem-se que a_{1996} é maior que 63.

9. Determine se existem inteiros positivos a e b para os quais todos os termos da sequência definida por

$$x_1 = 2010, \quad x_2 = 2011, \quad x_{n+2} = x_n + x_{n+1} + a\sqrt{x_n x_{n+1} + b}, n \geq 1,$$

são inteiros.

10. Seja n um inteiro positivo. Considere sequências $a_0, a_1, \ldots, a_k$ e $b_0, b_1, \ldots, b_k$ tais que $a_0 = b_0 = 1$ e $a_k = b_k = n$ e tais que, para cada i com $1 \leq i \leq k$, (a_i, b_i) é igual a $(1 + a_{i-1}, b_{i-1})$ ou $(a_{i-1}, 1 + b_{i-1})$. Seja também, para $1 \leq i \leq k$,

$$c_i = \begin{cases} a_i & \text{se } a_i = a_{i-1} \\ b_i & \text{se } b_i = b_{i-1} \end{cases}.$$

Prove que $c_1 + c_2 + \cdots + c_n = n^2 - 1$.

11. Considere a sequência $\{a_n\}$ definida da seguinte maneira:

- $a_1 = 1$;
- $a_2 = 3$;
- $a_{n+2} = 2a_{n+1}a_n + 1$, para todo inteiro $n \geq 1$.

Provar que a máxima potência de 2 que divide $a_{4006} - a_{4005}$ é 2^{2003}.

12. A sequência infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de inteiros positivos se define da seguinte maneira: $a_1 = 1$ e, para cada $n \geq 2$, a_n é o menor inteiro positivo distinto de $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ tal que:

$$\sqrt{a_n + \sqrt{a_{n-1} + \cdots + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_1}}}} \quad \text{é um inteiro.}$$

Demonstrar que todos os inteiros positivos aparecem na sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

13. Determine se existe uma sequência infinita $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ de inteiros não negativos que satisfaz as seguintes condições:

(i) Todos os números inteiros não negativos aparecem na sequência uma única vez.

(ii) A sequência

$$b_n = a_n + n, \quad n \geq 0,$$

é formada por todos os números primos, cada um aparecendo uma única vez.

14. Demonstrar que existe uma sequência de inteiros positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ que satisfaz as duas condições seguintes:

    (i) contém exatamente uma vez cada um dos inteiros positivos,

    (ii) para cada $n = 1, 2, \ldots$ a soma parcial $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ é divisível por n^n.

15. Determine se existe uma sequência infinita de inteiros positivos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tal que

    (i) cada inteiro positivo aparece exatamente uma vez na sequência;

    (ii) cada inteiro positivo aparece exatamente uma vez na sequência $|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, \ldots, |a_k - a_{k-1}|, \ldots$.

16. Dado um inteiro $k \geq 2$, seja $a_1 = 1$ e, para cada inteiro $n \geq 2$, seja a_n o menor $x > a_{n-1}$ tal que

$$x = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left\lfloor \sqrt[k]{\frac{x}{a_i}} \right\rfloor.$$

    Prove que todo primo aparece na sequência $a_1, a_2, \ldots$.

17. Seja λ a raiz positiva da equação $t^2 - 1998t - 1 = 0$. A sequência $x_0, x_1, \ldots$ por $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \lfloor \lambda x_n \rfloor$ para $n \geq 1$. Encontre o resto da divisão de x_{1998} por 1998.

18. Seja $n \geq 2$ um número inteiro positivo. No início existem n pulgas numa reta horizontal, nem todas no mesmo ponto.

    Para um número real positivo λ, define-se um *salto* da seguinte maneira:

    - Escolhem-se duas pulgas quaisquer nos pontos A e B com o ponto A à esquerda do ponto B;
    - A pulga que está em A salta até o ponto C da reta, à direita de B, tal que $\frac{BC}{AB} = \lambda$.

    Determine todos os valores de λ para os quais, para qualquer ponto M na reta e quaisquer posições iniciais das n pulgas, existe uma sucessão finita de saltos que levam todas as pulgas para pontos à direita de M.