

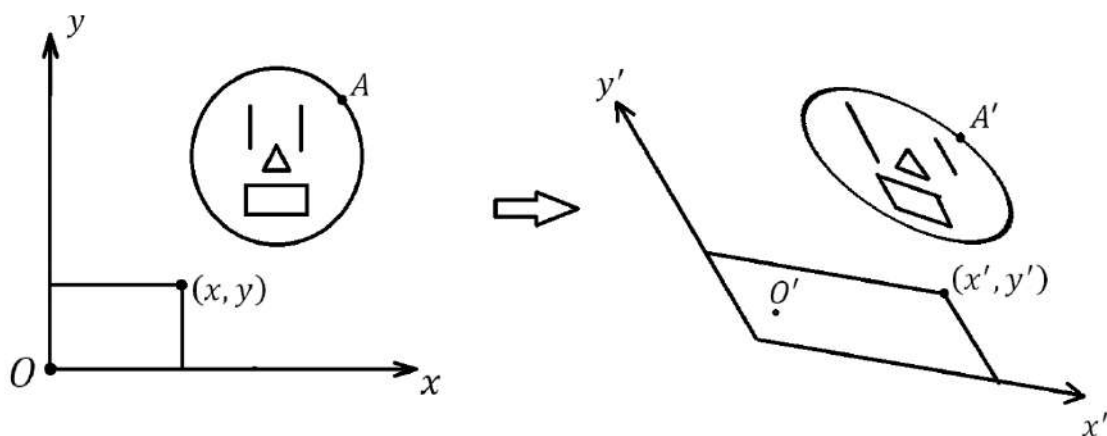
Tá Afim de uma Transformação Afim?

Prof. Davi Lopes

24ª Semana Olímpica – Teresina (PI)

1. Introdução

Neste material, veremos uma transformação que, de certa forma, generaliza praticamente todas as transformações geométricas mais estudadas em olimpíada. Trata-se da transformação afim, também conhecida como aplicação linear do plano no plano. A ideia por trás dela é de “distorcer o plano” de maneira linear, fazendo com que os novos eixos coordenados não sejam necessariamente ortogonais, mas que eles identifiquem, de maneira biunívoca, os pontos do plano, tal como a figura a seguir, onde A' é a imagem de A , O' é a imagem da origem O e x', y' são as novas direções dos “eixos coordenados”:



A figura resultante pode ser vista ainda como a figura original, projetada através de um projetor inclinado, ou seja, projetamos um desenho plano numa parede, não necessariamente paralela ao plano do desenho, e obtemos essa transformação linear como resultado. Mas ver a ideia intuitiva dessa transformação não é o bastante, precisamos defini-la formalmente, e é isso que vamos fazer a seguir. Só bora!

2. Definindo Transformação Afim e Generalizando Outras Transformações Geométricas

Definição de Transformação Afim: Dado um vetor $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, definimos

transformação afim a toda transformação de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n do tipo $X \rightarrow AX + B$, onde A é uma matriz $n \times n$ com entradas reais, cujo determinante é não nulo, e B é um vetor coluna fixo.

Observe que se $n = 1$, obtemos $A = a \neq 0$ e a transformação afim $x \rightarrow ax + b$ é a famosa função afim. (embora a função afim também inclua o caso $a = 0$). Observe que se $n = 2$, então $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ($ad - bc \neq 0$) e $B = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$, donde:

$$AX + B = \begin{bmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \end{bmatrix}$$

Neste material, focaremos nosso estudo nas transformações afim em \mathbb{R}^2 , embora muitos resultados vistos aqui podem ser facilmente generalizados para \mathbb{R}^n (Depois de estudar esse material, tente você mesmo fazer tais generalizações!).

É interessante notarmos o porquê de essa transformação ser uma generalização de praticamente todas as transformações geométricas clássicas vistas em olimpíada (com exceção da inversão).

Translação: Na definição, tome $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e B igual ao vetor de translação;

Rotação: Basta tomar $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ e:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \mapsto A \left[\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \right]$$

Onde $\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ são as coordenadas do centro de rotação.

Simetria Axial: Basta que A seja qualquer matriz com determinante igual a -1 . Por exemplo, se quisermos refletir em relação ao eixo x , é só fazer a transformação:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Homotetia: Tome $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, onde k é a razão de homotetia, e tome a aplicação como sendo:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \mapsto A \left[\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \right]$$

Onde $\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ são as coordenadas do centro de homotetia.

A composição de duas transformações afim é uma transformação afim (veja a demonstração na próxima seção). Dessa forma, composição de rotações, composições de reflexões, composições de homotetias e roto-homotetias são, todas, transformações afim.

A transformação afim também possui propriedades bem interessantes e surpreendentes. As propriedades a seguir mostram muito bem isso.

3. Propriedades Principais

Propriedades da Função Afim: Seja $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação afim, $\varphi(X) = AX + B$. As propriedades a seguir são verdadeiras.

1. φ é bijeção de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 ;
2. A composição de duas transformações afim é uma transformação afim.
3. φ leva retas em retas, isto é, se r é reta em \mathbb{R}^2 , então $\varphi(r)$ é reta em \mathbb{R}^2 ;
4. φ leva retas paralelas em retas paralelas, isto é, se $r \parallel s$ são duas retas em \mathbb{R}^2 , então $\varphi(r) \parallel \varphi(s)$ em \mathbb{R}^2 ;
5. (Proporção Constante entre Áreas). Para todo triângulo $P_1P_2P_3$, temos que:

$$\text{Área}(\varphi(P_1)\varphi(P_2)\varphi(P_3)) = |\det A| \cdot \text{Área}(P_1P_2P_3)$$

6. (Proporção Constante de Segmentos Alinhados). Se A, B, C estão numa reta, nessa ordem, e $\frac{AB}{BC} = k$, então $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C)$ estão numa reta, nessa ordem, e $\frac{\varphi(A)\varphi(B)}{\varphi(B)\varphi(C)} = k$;
7. Dados quaisquer 3 pontos não colineares P_1, P_2, P_3 , existe uma única transformação afim φ tal que $\varphi(P_1) = (0,0)$, $\varphi(P_2) = (1,0)$ e $\varphi(P_3) = (0,1)$. Em outras palavras, sempre es transformação afim levando um triângulo em qualquer outro (desde que eles não sejam degenerados).

Bônus 1: φ leva circunferências em elipses, e leva cônicas em cônicas.

Bônus 2: φ leva figuras convexas em figuras convexas.

Bônus 3: Dada uma curva C e uma reta l tangente a C em P , temos que $\varphi(l)$ é a reta tangente a $\varphi(C)$ no ponto $\varphi(P)$, ou seja, a transformação afim leva tangentes em tangentes.

Prova: Faremos a prova das propriedades de 1 a 7, deixando as propriedades bônus como exercícios para o leitor.

1. φ é injetiva (se $\varphi(X) = \varphi(Y) \Rightarrow AX + B = AY + B \Rightarrow AX = AY \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}(AY) \Rightarrow X = Y$, já que existe A^{-1} , pois $\det A \neq 0$) e φ é sobrejetiva (pois dado $Y \in \mathbb{R}^2$, veja que $\varphi(A^{-1}(Y - B)) = A(A^{-1}(Y - B)) + B = Y - B + B = Y$). Logo, φ é função bijetora.

2. A composição de duas transformações afim é uma transformação afim, pois se:

$$f: X \mapsto AX + B \text{ e } g: X \mapsto CX + D$$

São duas transformações afins, então:

$$f \circ g: X \mapsto ACX + (AD + B)$$

E como $\det AC = \det A \cdot \det C \neq 0$, temos que $f \circ g$ é transformação afim.

Antes de vermos as demonstrações das outras propriedades, convém observar o seguinte: dados três pontos $P_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$; $P_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$, temos que:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\bar{A}} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 + e & ax_2 + by_2 + e & ax_3 + by_3 + e \\ cx_1 + dy_1 + f & cx_2 + dy_2 + f & cx_3 + dy_3 + f \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{A} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Onde $\varphi(P_1) = (x'_1, y'_1)$, $\varphi(P_2) = (x'_2, y'_2)$, $\varphi(P_3) = (x'_3, y'_3)$. Note ainda que:

$$\det \bar{A} = \begin{vmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot d \cdot 1 + f \cdot b \cdot 0 + e \cdot c \cdot 0 - 0 \cdot d \cdot e - b \cdot c \cdot 1 - a \cdot f \cdot 0 =$$

$$= ad - bc = \det A$$

3. Para provarmos que φ leva retas em retas em retas, basta provar que ele leva três pontos colineares em três pontos colineares. Para tanto, se P_1, P_2, P_3 são colineares:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \det \bar{A} \cdot \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \stackrel{\text{Binet}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Rightarrow \det \left(\bar{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

E assim $\varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P_3)$ são colineares.

4. Suponha que φ leva as retas paralelas r, s em retas $\varphi(r), \varphi(s)$ concorrentes em P . Então, se $Q = \varphi^{-1}(P)$, então pela propriedade anterior, temos que Q está nas retas $\varphi^{-1}(\varphi(r)) = r$ e $\varphi^{-1}(\varphi(s)) = s$, logo r, s concorrem em Q , absurdo. Com isso, concluímos que $\varphi(r) \parallel \varphi(s)$.

5. Note que:

$$\text{Área}(P_1P_2P_3) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

E que:

$$\begin{aligned} \text{Área}(P_1'P_2'P_3') &= \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \det \left(\bar{A} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{\det \bar{A}}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = |\det A| \left(\frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| \right) \\ &= |\det A| \cdot \text{Área}(P_1P_2P_3) \end{aligned}$$

6. tome um ponto P fora da reta \overleftrightarrow{ABC} e use as relações de área para ver que a posição e a proporção dos segmentos se mantêm ao aplicar uma transformação afim.

7. Essencialmente, temos que encontrar constantes a, b, c, d, e, f tais que:

$$\begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \bar{A} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ (pois P_1, P_2, P_3 não estão alinhados), então a matriz

$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ admite uma inversa, e assim:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

E aí achamos a, b, c, d, e, f de modo único ■

4. Alguns Exemplos Introdutórios

Nesta seção, faremos alguns exemplos para entender melhor as propriedades vistas na seção anterior, bem como a forma matricial das transformações afim e a preservação da proporção entre áreas.

Exemplo 1: Seja $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a rotação do plano pelo ângulo $\frac{\pi}{3}$ (sentido anti-horário), em torno do ponto $(2, -3)$.

- Determine a matriz que representa essa rotação em coordenadas homogêneas
- Determine $F(0,4)$

Observação: Dada uma transformação afim $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$F \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

A matriz que representa F em coordenadas homogêneas é a matriz $\bar{A}_{3 \times 3}$ dada por:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tal nome se justifica, pois se $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ é a representação do ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ em coordenadas do plano projetivo real, então sua imagem por F é simplesmente $\bar{A}X$.

Solução: Vamos calcular $F(x, y)$ para três pontos não colineares.

- $F(2, -3) = (2, -3)$, pois o centro de rotação não muda;
- $F(2, 0) = (2 - \sqrt{3}, -2)$ e $F(0, -3) = \left(\frac{1}{2}, -3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ (é só trigonometria no triângulo 30-60-90).

Portanto:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - 3b + e \\ 2c - 3d + f \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 3b + e = 2 & (1) \\ 2c - 3d + f = -3 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 - \sqrt{3} \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + e \\ 2c + f \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a + e = 2 - \sqrt{3} & (1') \\ 2c + f = -2 & (2') \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ -3 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -3b + e \\ -3d + f \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3b + e = \frac{1}{2} & (1'') \\ -3d + f = -3 - \frac{3\sqrt{3}}{2} & (2'') \end{cases}$$

De (1) e (1'), temos $-3b = \sqrt{3} \Rightarrow b = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; de (2) e (2'), temos $-3d = -1 \Rightarrow d = \frac{1}{3}$.

De (1) e (1''), temos $2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$. De (2) e (2''), temos $2c = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Finalmente, de (1'), $e = 2 - \sqrt{3} - 2a = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$ e de (2)' $f = -2 - 2c = -2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Logo:

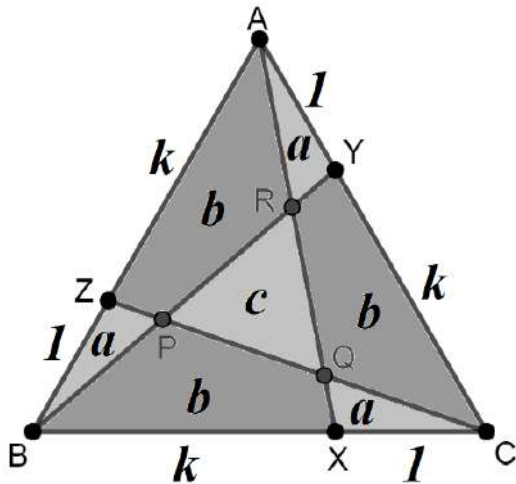
$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{3} & -2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E F(0,4) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{3} & -2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{7\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \blacksquare$$

Exemplo 2: Seja ABC um triângulo e sejam $X \in BC, Y \in CA, Z \in AB$ tais que:

$$\frac{BX}{XC} = \frac{CY}{YA} = \frac{AZ}{ZB} = k$$

Determine a proporção entre as áreas do triângulo delimitado pelas retas AX, BY, CZ e do triângulo ABC .



Solução: Como transformação afim preserva proporções entre áreas, e como podemos levar um triângulo não degenerado em qualquer outro por meio de uma transformação assim, podemos supor que ABC é um triângulo equilátero de lado $(k + 1)$. Dessa forma, $BX = CY = AZ = k$ e $XC = YA = ZB = 1$.

Considerando a figura ao lado, temos que, pela simetria, as áreas destacadas por a são iguais entre si, bem como as áreas destacadas por b são iguais entre si. Sendo c a área do triângulo PQR formado por AX, BY, CZ e S a área de ABC , temos que, por Menelaus no triângulo ABX , reta secante \overline{ZQC} :

$$\begin{aligned} \frac{CX}{CB} \cdot \frac{ZB}{ZA} \cdot \frac{QA}{QX} &= 1 \Rightarrow \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{AQ}{QX} = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{AQ}{QX} &= k(k+1) \therefore \frac{AQ}{AX} = \frac{AQ}{QX + AQ} = \frac{k(k+1)}{k(k+1) + 1} \quad (*) \end{aligned}$$

Daí, olhando proporções de áreas de triângulos como proporções de segmentos, vem:

$$\frac{[\Delta ABX]}{[\Delta ABC]} = \frac{BX}{BC} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow [\Delta ABX] = \frac{kS}{k+1} \therefore a + 2b + c = \frac{kS}{k+1} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{[\Delta AZQ]}{[\Delta ABC]} &= \frac{[\Delta AZQ]}{[\Delta AZX]} \cdot \frac{[\Delta AZX]}{[\Delta ABX]} \cdot \frac{[\Delta ABX]}{[\Delta ABC]} = \left(\frac{AQ}{AX}\right) \left(\frac{AZ}{AB}\right) \left(\frac{BX}{BC}\right) \stackrel{(*)}{=} \\ &= \frac{k(k+1)}{k^2 + k + 1} \cdot \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k}{k+1} = \frac{k^3}{(k+1)(k^2 + k + 1)} \therefore \\ \therefore [\Delta AZQ] &= b + c = \frac{k^3 S}{(k+1)(k^2 + k + 1)} \quad (2) \end{aligned}$$

Como $[\Delta ABC] = 3a + 3b + c = S$ (3), fazendo (1) - (2) - $\frac{1}{3}$ (3), vem:

$$-\frac{c}{3} = (a + 2b + c) - (b + c) - \frac{1}{3}(3a + 3b + c) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{kS}{k+1} - \frac{k^3S}{(k+1)(k^2+k+1)} - \frac{S}{3} = \frac{kS}{k+1} \left(1 - \frac{k^2}{k^2+k+1} \right) - \frac{S}{3} = \\
&= \frac{kS}{k+1} \left(\frac{k+1}{k^2+k+1} \right) - \frac{S}{3} = \frac{(3k - (k^2+k+1))S}{3(k^2+k+1)} = -\frac{(k-1)^2S}{3(k^2+k+1)}
\end{aligned}$$

Cancelando o fator $-\frac{1}{3}$, segue que a proporção desejada é:

$$\frac{c}{S} = \frac{(k-1)^2}{k^2+k+1} \blacksquare$$

Exemplo 3 (Cone Sul/2017): Denotamos $A(XYZ)$ como a área do triângulo XYZ . Dizemos que um polígono $P_1P_2 \dots P_n$, convexo e não regular de n lados é *guayaco* se existe um ponto O em seu interior tal que:

$$A(P_1OP_2) = A(P_2OP_3) = \dots = A(P_{n-1}OP_n) = A(P_nOP_1)$$

Demonstrar que para todo inteiro $n \geq 3$ existe um polígono guayaco de n lados.

Solução: Seja $Q_1Q_2 \dots Q_n$ um polígono regular e Q seu centro. Sabemos que, por simetria, $A(Q_1QQ_2) = A(Q_2QQ_3) = \dots = A(Q_{n-1}QQ_n) = A(Q_nQQ_1) = A$.

Agora, considere uma transformação afim φ que leva $Q_1Q_2Q_3$ num triângulo escaleno $P_1P_2P_3$. Seja $P_i = \varphi(Q_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) e $O = \varphi(Q)$. Como a transformação afim leva polígonos convexos em polígonos convexos (pois leva segmentos no interior de triângulos em segmentos no interior de triângulos), então $Q_1Q_2 \dots Q_n$ é levado no polígono convexo e não regular $P_1P_2 \dots P_n$, e Q é levado num ponto O em seu interior tal que:

$$A(P_1OP_2) = A(P_2OP_3) = \dots = A(P_{n-1}OP_n) = A(P_nOP_1) = K \cdot A \quad (K > 0)$$

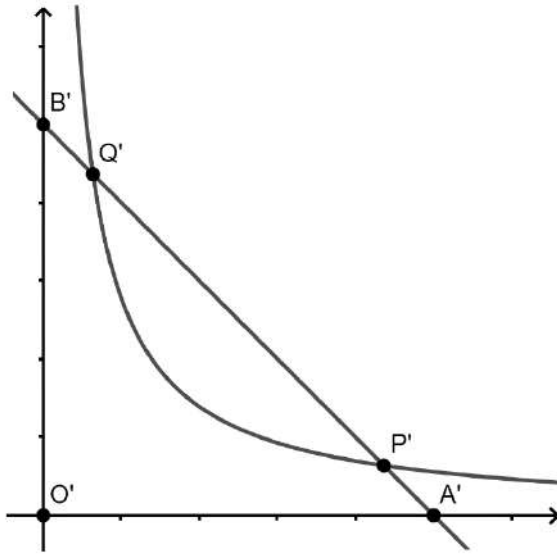
Assim construímos o polígono desejado \blacksquare

5. Cônicas e Transformações Afim

Transformações afim são particularmente úteis para se trabalhar com cônicas, sobretudo quando estamos lidando com áreas, proporções entre segmentos, concorrência e colinearidade, uma vez que podemos transformar essas cônicas “feias” em figuras mais “simpáticas”, como circunferências, hipérbolares equiláteras, dentre outras.

Para começar, vejamos um exemplo que parece absurdo de desafiador, mas que uma transformação afim adequada o reduz a uma mera simetria.

Exemplo 4: Uma reta corta as assíntotas de uma hipérbole nos pontos A e B , e corta a hipérbole nos pontos P e Q . Prove que $AP = BQ$.



Solução: Seja O a interseção de suas assíntotas. Considere uma transformação afim que leva O em $O' = (0,0)$, A em $A' = (1,0)$ e B em $B' = (0,1)$. Como transformação afim preserva colinearidade e proporção de segmentos colineares, temos que, sendo P', Q' as imagens de P, Q pela transformação afim, respectivamente, se provarmos que $A'P' = B'Q'$, então $\frac{AP}{BQ} = \frac{A'P'}{B'Q'} = 1$, donde $AP = BQ$ e o problema estará resolvido.

Acontece que, como transformação afim preserva tangência, as retas $O'A'$ e $O'B'$ são as assíntotas da hipérbole transformada, e como tais retas são os eixos coordenados, temos que a hipérbole transformada é do tipo $xy = k$, para algum $k \neq 0$ real. Logo, $A'P' = B'Q'$ por simetria e o problema acabou ■

E como podemos usar as transformações afim para estudar melhor elipses? O próximo exemplo nos dá uma ideia de como fazer isso.

Exemplo 5 (Elipses e Transformações Afim): Sejam $a, b > 0$ e seja \mathcal{E} a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- (a) Mostre que para cada ponto $P \in \mathcal{E}$, existe um único ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $P = (a \cdot \cos \theta, b \cdot \sin \theta)$.
- (b) Mostre que a área da elipse é πab ;
- (c) Dentre os triângulos inscritos em \mathcal{E} , existem alguns que possuem área máxima. Qual é essa área máxima?

Solução: (a) Considere a transformação afim $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\varphi(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} X$$

Então, dado $X = (x, y) \in \mathcal{E}$, se $X' = \varphi(X) = (x', y')$, então $x' = \frac{x}{a}$, $y' = \frac{y}{b}$ e de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, temos $(x')^2 + (y')^2 = 1$, ou seja, X' está no ciclo trigonométrico, e assim existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $X' = (\cos \theta, \sin \theta)$. Portanto $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$.

(b) Podemos ver a área da elipse como sendo a soma infinita da área de vários triângulos pequenos que a compõe, como uma integral. Cada um desses triângulos tem a

área multiplicada por $\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{vmatrix} = \frac{1}{ab}$ ao ser transformado em triângulos que compõe a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Assim, ao integramos sobre ela, temos que:

$$\text{Área}(\text{Elipse}) = \int d\Delta = \int ab(d\Delta') = ab \int d\Delta' = ab(\text{Área}(\text{Ciclo Trig.}))$$

Onde $d\Delta$ é qualquer triângulo que é elemento de área da elipse, e $d\Delta'$ é a imagem de $d\Delta$ pela transformação afim. Portanto, como $(\text{Área}(\text{Ciclo Trig.})) = \pi \cdot 1^2 = \pi$, segue que $\text{Área}(\text{Elipse}) = \pi ab$.

(c) O triângulo de área máxima inscrito no ciclo trigonométrico é o equilátero (A ideia é notar que os pontos variam sobre uma circunferência, que é compacta, e assim existe triângulo de área máxima. Se esse triângulo ABC não for equilátero, digamos $AB < AC$, desloque A até o ponto médio do arco BC que o contém e aumentamos a área além do máximo, absurdo). Como ele tem área $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, segue que, ao aplicarmos φ^{-1} , a área do triângulo correspondente (que será máxima por linearidade) é $\frac{3\sqrt{3}ab}{4}$. Note que o triângulo de área máxima na elipse nem sempre é equilátero! Mas ele é sempre oriundo do triângulo equilátero pela transformação afim ■

Exemplo 6: Seja $ABCDE$ um pentágono convexo e sejam $F = BC \cap DE$, $G = CD \cap EA$, $H = DE \cap AB$, $I = EA \cap BC$, $J = AB \cap CD$. Prove que se as áreas dos triângulos AHI, BIJ, CJF, DFG, EGH são iguais, então AF, BG, CH, DI e EJ são concorrentes.

Solução: A condição das áreas iguais é equivalente, pela fórmula $\text{Área} = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2}$, a $HA = BJ$, $IB = CF$, $CJ = GD$, $DF = HE$ e $GE = IA$. Tais igualdades, devido à colinearidade dos segmentos, são preservadas ao aplicarmos qualquer transformação afim. Assim, aplique uma transformação afim que leve o triângulo IAB num triângulo isósceles (Fig. 1). No que segue, indicaremos por P' a imagem de P por uma transformação afim.

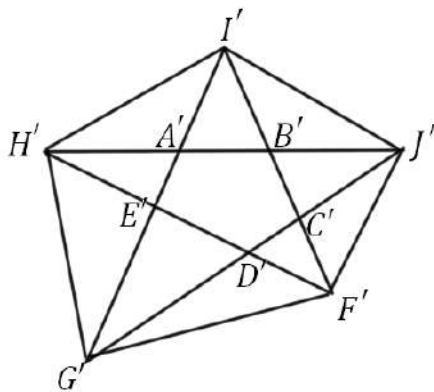


Fig. 1

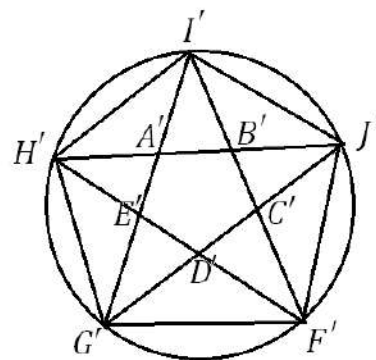


Fig. 2

Suponha que $F'B' < A'G'$. Como $H'A' = B'J'$ e $I'A' = I'B'$, temos que as retas $I'A'$ e $I'B'$ são simétricas em relação à mediatriz de $A'B'$ (que é a mediatriz de $H'J'$). Assim, $B'C' > A'E'$. Para tanto, basta ver que, ao deslocarmos G' ao longo de $\overline{A'E'}$, o valor de $B'C'$ aumenta, e o mesmo ocorre com $B'C'$ ao deslocarmos F' ao longo de $\overline{B'C'}$, e podemos comparar tais distâncias, devido à simetria ao longo de $H'J'$. Daí, $F'B' - B'C' < A'G' - A'E' \Rightarrow C'F' < G'E'$ e como $C'F' = I'B' = I'A' = G'E'$, temos um absurdo. Analogamente, não podemos ter $F'B' > A'G'$ e daí $F'B' = A'G'$, donde, pela simetria, $F'G' \parallel H'J'$, e ao fazermos a transformação afim inversa, concluímos que $FG \parallel HJ$. Analogamente, $GH \parallel IF$, $HI \parallel JG$, $IJ \parallel FH$ e $JF \parallel GI$.

Agora, como F, G, H, I, J estão numa cônica (lembre-se que 5 pontos sempre estão numa cônica), e devido à convexidade do pentágono, tal cônica é uma elipse (verifique!). Daí, aplicando uma transformação afim que transforma tal elipse numa circunferência (a ideia é rotacionar a elipse, tornando-a paralela aos eixos coordenados, e a seguir transladá-la para que seu centro vire a origem, transformando-a numa circunferência em seguida), temos que $F'G'H'I'J'$ é inscritível em Γ . Além disso, como $F'G' \parallel H'J'$, temos que os arcos menores $F'J'$ e $H'G'$ em Γ são iguais. Analogamente, $G'F'$ e $I'H'$ são iguais, $H'G'$ e $J'I'$ são iguais, $I'H'$ e $F'J'$ são iguais e $J'I'$ e $G'F'$ são iguais. Logo, $F'G' = G'H' = H'I' = I'J' = J'F'$ e assim $F'G'H'I'J'$ é regular. Logo, $A'F'$, $B'G'$, $C'H'$, $D'I'$ e $E'J'$ concorrem no centro do pentágono. Portanto, ao aplicarmos a transformação afim inversa, e notando que retas concorrentes são levadas em retas concorrentes (pois transformação afim preserva colinearidade), temos que AF, BG, CH, DI e EJ são concorrentes ■

O próximo exemplo mostra um fato que será muito útil nas questões de olimpíada que resolveremos nos exemplos seguintes.

Exemplo 7: Seja ABC um triângulo, e sejam D, E, F pontos sobre BC, CA, AB , respectivamente, tais que:

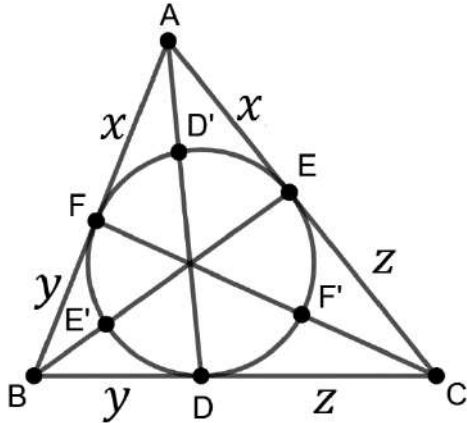
$$BD : DC = y : z; CE : EA = z : x; AF : FB = x : y$$

Suponha que os pontos D', E', F' estão sobre os segmentos AD, BE, CF , respectivamente, tais que:

$$AD' : D'D = x(y + z) : 4yz; BE' : E'E = y(z + x) : 4zx; CF' : F'F = z(x + y) : 4xy$$

Demonstre que D, D', E, E', F, F' estão sobre uma elipse \mathcal{E} que é tangente internamente aos lados do triângulo ABC .

Solução: Inicialmente, vamos provar que o resultado vale num triângulo ABC tal que $p - a = x, p - b = y, p - c = z$ (Tal triângulo existe, pois basta tomar $a = y + z, b = z + x$ e $c = x + y$, e não é difícil ver que eles cumprem a desigualdade triangular). Sejam D', E', F' as segundas interseções de AD, BE, CF (D, E, F são pontos de tangência com o incírculo ω).



Temos que, por potência de ponto,:

$$AD' \cdot AD = AE^2 \Rightarrow AD' \cdot AD = x^2 \quad (1)$$

Por Lei dos Cossenos em ABC , temos:

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \\ &= \frac{(x+y)^2 + (y+z)^2 - (z+x)^2}{2(x+y)(y+z)} \end{aligned}$$

E pela lei dos cossenos em ABD , vem:

$$\begin{aligned} AD^2 &= (x+y)^2 + y^2 - 2(x+y)y \cdot \cos B = \\ &= (x+y)^2 + y^2 - 2(x+y)y \left(\frac{(x+y)^2 + (y+z)^2 - (z+x)^2}{2(x+y)(y+z)} \right) = \\ &= x^2 + 2xy + 2y^2 - y \left(\frac{2y^2 + 2yx + 2yz - 2xz}{y+z} \right) = \\ &= \frac{x^2y + x^2z + 2xy^2 + 2xyz + 2y^3 + 2y^2z - 2y^3 - 2y^2x - 2y^2z + 2xyz}{y+z} = \\ &= \frac{x^2y + x^2z + 2xyz + 2xyz}{y+z} = \frac{x(xy + xz + 4yz)}{y+z} \Rightarrow AD^2 = \frac{x(xy + xz + 4yz)}{y+z} \quad (2) \end{aligned}$$

Fazendo (1) \div (2):

$$\begin{aligned} \frac{AD'}{AD} &= \frac{AD' \cdot AD}{AD^2} = \frac{x^2}{\frac{x(xy + xz + 4yz)}{y+z}} = \frac{xy + xz}{xy + xz + 4yz} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{AD'}{DD'} = \frac{AD'}{AD - AD'} = \frac{x(y+z)}{4yz} \end{aligned}$$

Que bate com a proporção da questão! Analogamente, $BE' : E'E = y(z+x) : 4zx$ e $CF' : F'F = z(x+y) : 4xy$. Portanto, nesse caso particular, temos que o incírculo já seria a elipse desejada.

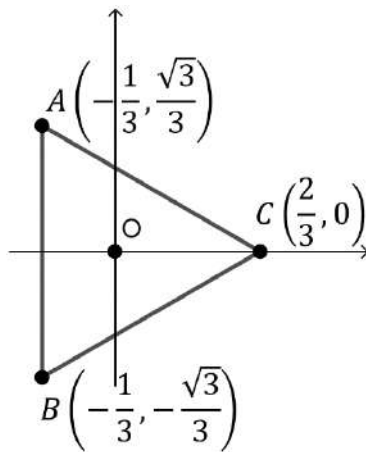
Agora, para generalizar, aplique uma transformação afim que leve esse nosso triângulo em um triângulo qualquer. Assim, os pontos D, E, F, D', E', F' são levados em pontos que cumprem as proporções do enunciado (já que tais proporções envolvem segmentos colineares), e o incírculo ω é levado numa elipse passando pelos seis pontos e tangente aos lados, já que a transformação afim preserva tangência ■

E finalmente vamos aos problemas de olimpíada!

Exemplo 8 (RMM/2008 – Adaptada): Seja P um ponto escolhido aleatoriamente no interior de um triângulo ABC . Determine a probabilidade de que:

$$\sqrt{[ABP]} \geq \sqrt{[BPC]} + \sqrt{[CAP]}$$

Solução: Como as áreas de triângulos ficam proporcionais ao se aplicar uma transformação afim, temos que, se calcularmos tal probabilidade num triângulo equilátero ABC , então essa probabilidade será a mesma para os demais triângulos, já que podemos levar o triângulo em qualquer outro por uma transformação afim, e as proporções entre áreas, tanto a probabilidade (que é calculada tendo a área como medida) como a relação dada, se manterão. Doravante, estudaremos apenas o caso do triângulo ABC ser equilátero e de lado $2/\sqrt{3}$ (para que a altura seja 1).



Sejam:

$$x = d(P, AB), y = d(P, BC), z = d(P, CA)$$

Sabemos que $x + y + z = 1$ (pois é a altura do triângulo) e que:

$$[ABP] = \frac{x}{2}; [BCP] = \frac{y}{2}, [CAP] = \frac{z}{2}$$

Portanto, queremos saber quando $\sqrt{x} \geq \sqrt{y} + \sqrt{z}$, para x, y, z reais não negativos que somam 1.

Se $P = (x_p, y_p)$, então $x_p = -\frac{1}{3} + x = \frac{2}{3} - y - z$ e como a reta AC tem equação

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \left(x + \frac{1}{3}\right) \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}x - y + \frac{2\sqrt{3}}{9} = 0$$

Analogamente, a equação da reta BC é:

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}x + y + \frac{2\sqrt{3}}{9} = 0$$

Agora, calculemos distâncias de ponto a reta:

$$y = d(P, \overline{AC}) = \frac{\left| -\frac{\sqrt{3}}{3}x_p - y_p + \frac{2\sqrt{3}}{9} \right|}{\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| -x_p - \sqrt{3}y_p + \frac{2}{3} \right|}{2}$$

$$z = d(P, \overline{AC}) = \frac{\left| -\frac{\sqrt{3}}{3}x_P + y_P + \frac{2\sqrt{3}}{9} \right|}{\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| -x_P + \sqrt{3}y_P + \frac{2}{3} \right|}{2}$$

Esses cálculos mostram que, quando P varia dentro do triângulo, as coordenadas (x_P, y_P) são funções lineares de y, z (e, conseqüentemente, de $x = 1 - y - z$).

Vejamos se $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ formam lados de um triângulo. Isso é verdade se, e somente se:

$$2\left((\sqrt{x}\sqrt{y})^2 + (\sqrt{y}\sqrt{z})^2 + (\sqrt{z}\sqrt{x})^2\right) - \left((\sqrt{x})^4 + (\sqrt{y})^4 + (\sqrt{z})^4\right) > 0$$

A ideia é notar que, por Heron, a área de um triângulo de lados a, b, c é $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, com $2p = a + b + c$. Pode-se provar que:

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{1}{16} \left(2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4) \right)$$

De modo que, se eles formam lado de triângulo, então tal termo é positivo, e caso não formem, exatamente um dentre $p-a, p-b, p-c$ é não positivo, donde a expressão é não positiva.

Então, para $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ formar triângulo, devemos ter que:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx) < 0$$

Considere a cônica de equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx) = 0 \quad (*)$$

De fato, isso é uma cônica, pois x, y, z podem ser escritos como funções lineares de x_P, y_P , resultando em algo do tipo $Ax_P^2 + 2Bx_Py_P + Cy_P^2 + 2Dx_P + 2Ey_P + F = 0$, que é a equação de uma cônica. Portanto, se encontrarmos 5 pontos onde (*) é válido, então encontramos nossa cônica.

Note que se $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ (ponto médio de lado), então:

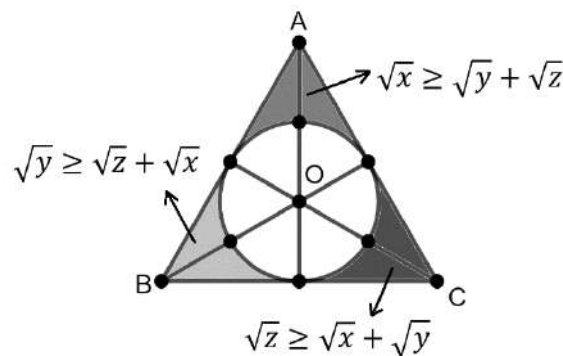
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = 0$$

Logo, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ estão na cônica (a conta para os demais é análoga).

Note que se $(x, y, z) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$ (ponto médio do segmento AO , onde $O = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ é o centro de ABC), então:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx) = \frac{2}{36} + \frac{4}{9} - 2\left(\frac{1}{36} + \frac{2}{9}\right) = 0$$

Logo, $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$ e $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ estão na cônica. Como o incírculo passa por esses 6 pontos, e só há uma cônica assim, temos que a equação (*) é justamente a equação do incírculo Γ , donde $x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx) < 0$ representa o interior de Γ . Portanto, para que $x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx) \geq 0$, P deve estar em uma das 3 regiões hachuradas:



Como a área correspondente à inequação $\sqrt{x} \geq \sqrt{y} + \sqrt{z}$ é um terço da região hachurada (pela simetria), temos que a probabilidade de isso ocorrer é:

$$\frac{\frac{1}{3}(\text{Área Hachurada})}{\text{Área}(ABC)} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{h^2\sqrt{3}}{3} - \pi\left(\frac{h}{3}\right)^2\right)}{\frac{h^2\sqrt{3}}{3}} = \frac{h^2(3\sqrt{3} - \pi)\sqrt{3}}{h^2} = \frac{9 - \sqrt{3}\pi}{27} \blacksquare$$

Antes de partirmos para nosso próximo exemplo, vejamos um critério para saber quando 4 pontos numa elipse são concíclicos olhando apenas para suas imagens numa transformação afim. É o que diz o lema a seguir.

Lema: Sejam A_1, A_2, A_3, A_4 pontos na elipse \mathcal{E} de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, e suponha que $a \neq b$. Considere ângulos $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < 2\pi$ tais que:

$$A_1 = (a \cdot \cos \theta_1, b \cdot \sin \theta_1); A_2 = (a \cdot \cos \theta_2, b \cdot \sin \theta_2)$$

$$A_3 = (a \cdot \cos \theta_3, b \cdot \sin \theta_3); A_4 = (a \cdot \cos \theta_4, b \cdot \sin \theta_4)$$

Então o quadrilátero $A_1A_2A_3A_4$ é inscrito se, e só se, para algum inteiro positivo K , tivermos $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 2K\pi$.

Prova: A ideia aqui é demonstrar que, se $\theta_4 = 2K\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$, o quadrilátero $A_1A_2A_3A_4$ é inscrito. Isso de fato resolve o problema, pois dados $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, a circunferência que passa por A_1, A_2, A_3 intersecta a elipse em um único ponto distinto, e se provarmos que esse ponto é precisamente A_4 , acabamos. Para fazer tal prova, vamos usar o teorema de Ptolomeu, e para isso necessitaremos saber quem são as distâncias A_iA_j . Note que, para $i > j$:

$$\begin{aligned} A_iA_j &= \sqrt{(a \cos \theta_i - a \cos \theta_j)^2 + (b \sin \theta_i - b \sin \theta_j)^2} = \\ &= \sqrt{\left(-2a \sin\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_i + \theta_j}{2}\right)\right)^2 + \left(2b \sin\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_i + \theta_j}{2}\right)\right)^2} = \\ &= 2 \sin\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{2}\right) \sqrt{a^2 \sin^2\left(\frac{\theta_i + \theta_j}{2}\right) + b^2 \cos^2\left(\frac{\theta_i + \theta_j}{2}\right)} \end{aligned}$$

Assim, para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, $i > j$ e $k > l$, notando que $\frac{\theta_i + \theta_j}{2} = K\pi - \frac{\theta_k + \theta_l}{2}$ implica $\sin^2\left(\frac{\theta_i + \theta_j}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\theta_k + \theta_l}{2}\right)$ e $\cos^2\left(\frac{\theta_i + \theta_j}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta_k + \theta_l}{2}\right)$, temos que:

$$A_iA_j \cdot A_kA_l = 4 \sin\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_k - \theta_l}{2}\right) \left(a^2 \sin^2\left(\frac{\theta_i + \theta_j}{2}\right) + b^2 \cos^2\left(\frac{\theta_i + \theta_j}{2}\right)\right)$$

Como, por arco duplo:

$$a^2 \sin^2\left(\frac{\theta_i + \theta_j}{2}\right) + b^2 \cos^2\left(\frac{\theta_i + \theta_j}{2}\right) = \frac{(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2) \cos(\theta_i + \theta_j)}{2}$$

E, de Prostaferese:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_k - \theta_l}{2}\right) &= \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\theta_i + \theta_l - K\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta_i + \theta_k - K\pi}{2}\right) \right) \\ &= (-1)^K \frac{1}{2} (\cos(\theta_i + \theta_l) - \cos(\theta_i + \theta_k)) \end{aligned}$$

Assim:

$$A_iA_j \cdot A_kA_l = (-1)^K \left((a^2 + b^2) f(i, j; k, l) - \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right) g(i, j; k, l) \right)$$

Onde:

$$f(i, j; k, l) = \cos(\theta_i + \theta_l) - \cos(\theta_i + \theta_k)$$

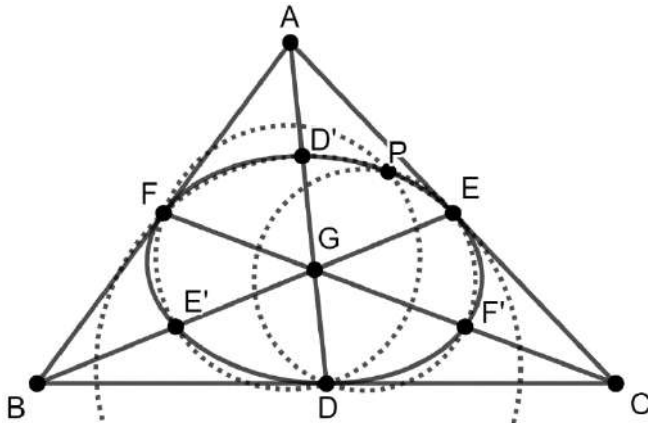
$$\begin{aligned}
g(i, j; k, l) &= 2(\cos(\theta_i + \theta_l) - \cos(\theta_i + \theta_k)) \cos(\theta_i + \theta_j) = \\
&= 2 \cos(\theta_i + \theta_l) \cos(\theta_i + \theta_j) - 2 \cos(\theta_i + \theta_k) \cos(\theta_i + \theta_j) = \\
&= \cos\left(\overbrace{2\theta_i + \theta_j + \theta_l}^{2K\pi + \theta_i - \theta_k}\right) + \cos(\theta_j - \theta_l) - \cos\left(\overbrace{2\theta_i + \theta_j + \theta_k}^{2K\pi + \theta_i - \theta_l}\right) + \cos(\theta_j - \theta_k) \\
\Rightarrow g(i, j; k, l) &= \cos(\theta_i - \theta_k) + \cos(\theta_j - \theta_l) - \cos(\theta_i - \theta_l) - \cos(\theta_j - \theta_k)
\end{aligned}$$

Portanto, para provar que $A_2A_1 \cdot A_4A_3 + A_4A_1 \cdot A_3A_2 = A_3A_1 \cdot A_4A_2$, é suficiente provarmos que $f(2,1;4,3) + f(4,1;3,2) = f(3,1;4,2)$ e que $g(2,1;4,3) + g(4,1;3,2) = g(3,1;4,2)$. Vamos às contas!

$$\begin{aligned}
&f(2,1;4,3) + f(4,1;3,2) = \\
&= (\cos(\theta_2 + \theta_3) - \cos(\theta_2 + \theta_4)) + (\cos(\theta_4 + \theta_2) - \cos(\theta_4 + \theta_3)) = \\
&= \cos(\theta_2 + \theta_3) - \cos(\theta_2 + \theta_4) = f(3,1;4,2) \\
&g(2,1;4,3) + g(4,1;3,2) = \\
&= (\cos(\theta_2 - \theta_4) + \cos(\theta_1 - \theta_3) - \cos(\theta_2 - \theta_3) - \cos(\theta_1 - \theta_4)) + \\
&\quad (\cos(\theta_4 - \theta_3) + \cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos(\theta_4 - \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_3)) = \\
&= \cos(\theta_4 - \theta_3) + \cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos(\theta_2 - \theta_3) - \cos(\theta_1 - \theta_4) = \\
&= \cos(\theta_3 - \theta_4) + \cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos(\theta_3 - \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_4) = \\
&= g(3,1;4,2)
\end{aligned}$$

Portanto, pela recíproca do teorema de Ptolomeu, os pontos A_1, A_2, A_3, A_4 são concíclicos e a demonstração do lema está completa ■

Exemplo 9 (Rússia/2016 – Adaptado): Seja ABC um triângulo de baricentro G . As retas AG, BG, CG intersectam os lados opostos em D, E, F , respectivamente. Se D', E', F' são os pontos médios dos segmentos AG, BG, CG , respectivamente, prove que:



- Existe uma elipse \mathcal{E} de centro G , que passa pelos pontos D, D', E, E', F, F' , de modo que \mathcal{E} e tangente internamente aos lados do triângulo ABC .
- Se $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ são os circuncírculos dos triângulos $D'E'F, DE'F$ e DEF' , respectivamente, então Γ_A, Γ_B e Γ_C possuem um ponto em comum, e esse ponto está em \mathcal{E} .

Solução: (a) Considere a transformação afim que leva ABC num triângulo equilátero. Observe que os pontos D, E, F, D', E', F' são levados em pontos no incírculo de ABC , onde D, D', E, E' e F, F' são diametralmente opostos e G é o centro. Assim, ao revertermos a transformação afim, o centro G é levado no centro G' da elipse \mathcal{E} que passa por D, E, F, D', E', F' , e ela é tangente aos lados, pois transformação afim preserva tangência.

(b) Parametrize os pontos da elipse tangente em (a). Por uma escolha adequada de eixos, podemos supor que tal elipse é $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e que:

$$D = (a \cos \theta_1, b \sin \theta_1); E = (a \cos \theta_2, b \sin \theta_2); F = (a \cos \theta_3, b \sin \theta_3)$$

Então, como DD', EE', FF' passam pelo centro G da elipse:

$$D' = (a \cos(\theta_1 + \pi), b \sin(\theta_1 + \pi));$$

$$E' = (a \cos(\theta_2 + \pi), b \sin(\theta_2 + \pi)); F' = (a \cos(\theta_3 + \pi), b \sin(\theta_3 + \pi))$$

Agora, seja $P = (a \cos \theta, b \sin \theta)$, onde $\theta = \pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$. Note que:

$$\theta + (\theta_1 + \pi) + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi; \theta + \theta_1 + (\theta_2 + \pi) + \theta_3 = 2\pi$$

$$\theta + \theta_1 + \theta_2 + (\theta_3 + \pi) = 2\pi$$

De modo que, pelo lema, os pontos P, D', E, F são concíclicos, bem como P, D, E', F e P, D, E, F' , provando que as três circunferências em questão se intersectam sobre \mathcal{E} ■

Antes de resolver nosso último exemplo, mais uma proposição auxiliar.

Proposição: Seja \mathcal{E} uma elipse de focos F_1, F_2 e seja P um ponto no plano.

- (i) (*Propriedade Óptica da Elipse*): Se $P \in \mathcal{E}$ e se ℓ a reta tangente a \mathcal{E} por P (Fig. 1), temos $\angle(\ell, \overline{PF_1}) = \angle(\ell, \overline{PF_2})$.
- (ii) (*Propriedade Isogonal da Elipse*): Se P é um ponto fora de \mathcal{E} e se A_1, A_2 pontos sobre \mathcal{E} tais que $\overline{PA_1}, \overline{PA_2}$ são tangentes a \mathcal{E} (Fig. 2). Então, $\angle A_1 P F_1 = \angle A_2 P F_2$. Ademais as retas $\overline{F_1 P}$ e $\overline{F_2 P}$ são bissetrizes dos ângulos $\angle A_1 F_1 A_2$ e $\angle A_1 F_2 A_2$, respectivamente.

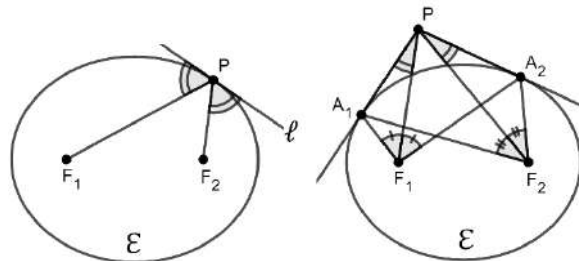
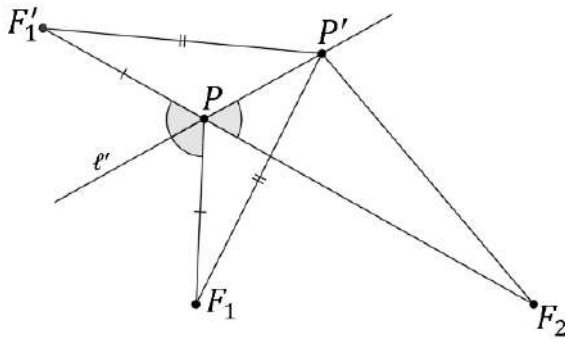


Fig. 1

Fig. 2

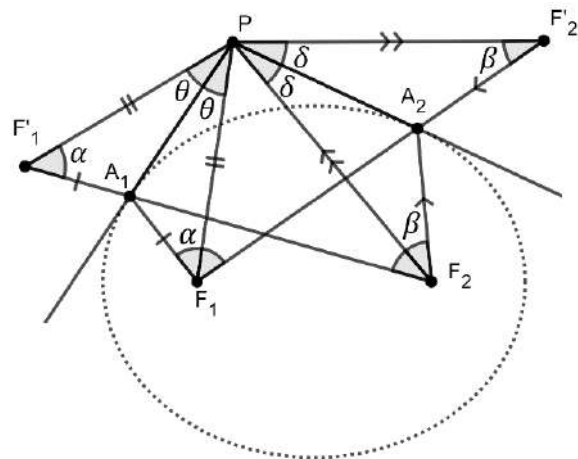


Prova: (i) Seja ℓ' uma reta que passa por P e tal que ela forma ângulos iguais com PF_1 e PF_2 . Vamos mostrar que ela é a reta tangente ℓ . Suponha que não, então ℓ' intersecta a elipse \mathcal{E} novamente num ponto P' tal que $P'F_1 + P'F_2 = 2a = PF_1 + PF_2$, onde $2a$ é o eixo maior da elipse. Seja F'_1 o simétrico de F_1 relativo a ℓ' .

Pela simetria de ângulos, temos que os três ângulos destacados são iguais, e assim, temos que F_2, P e F'_1 são colineares. Daí, $F'_1F_2 = F_2P + PF'_1 = F_2P + PF_1 = 2a$, pela simetria. No entanto, temos que, pela definição de elipse: $2a = F_1P' + P'F_2 = F'_1P' + P'F_2$ e pela desigualdade triangular: $2a = F'_1P' + P'F_2 > F'_1F_2 = 2a \Rightarrow 2a > 2a$, absurdo. Assim, a elipse toca ℓ' somente em P , donde $\ell' = \ell$. Logo, a primeira afirmação está provada.

(ii) Sejam F'_1, F'_2 os simétricos de F_1, F_2 relativos às retas $\overrightarrow{PA_1}, \overrightarrow{PA_2}$, respectivamente. Pelo que vimos antes, F_1, A_2, F'_2 são colineares, e F_2, A_1, F'_1 também o são, além de que $F'_1A_1 = F_1A_1$, $F'_2A_2 = F_2A_2$ e que $F_1F'_2 = F'_1F_2 = 2a$. Pela simetria, temos também:

$$\begin{aligned}
 PF_1 &= PF'_1; PF_2 = PF'_2 \\
 \angle PF_1A_1 &= \angle PF'_1A_1 = \alpha \\
 \angle PF_2A_2 &= \angle PF'_2A_2 = \beta \\
 \angle F_1PA_1 &= \angle F'_1PA_1 = \theta \\
 \angle F_2PA_2 &= \angle F'_2PA_2 = \delta
 \end{aligned}$$



Pelo caso LLL, $\Delta PF'_1F_2 \cong \Delta PF_1F'_2$. Assim:

$$\begin{aligned}
 \angle F'_1PF_2 &= \angle F_1PF'_2 \Rightarrow 2\theta + \angle F_1PF_2 = 2\delta + \angle F_1PF_2 \Rightarrow \theta = \delta \therefore \angle A_1PF_1 = \angle A_2PF_2 \\
 \angle PF_1F'_2 &= \angle PF'_1F_2 = \alpha; \angle PF_2F'_1 = \angle PF'_2F_1 = \beta \Rightarrow \\
 \Rightarrow \angle A_1F_1P &= \angle A_2F_1P = \alpha; \angle A_1F_2P = \angle A_2F_2P = \beta
 \end{aligned}$$

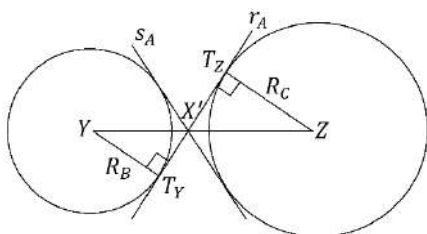
E assim a segunda afirmação está demonstrada ■

O último exemplo resolvido neste material foi o problema 3 da prova da OBM do nível 3. Apesar de ser um problema extremamente desafiador, usando todas as técnicas e ideias vistas neste material, ele pode ser resolvido com “apenas uma pensada” e sua solução é imediata quando percebemos quem são os pontos e os ângulos envolvidos. Vejamos agora seu enunciado e sua solução “matemágica”!

Exemplo 10 (OBM/2020): Sejam r_A, r_B, r_C semirretas de origem P . O círculo ω_A , de centro X , é tangente a r_B e r_C ; o círculo ω_B , de centro Y , é tangente a r_C e r_A ; e o círculo ω_C , de centro Z , é tangente a r_A e r_B . Suponha que P está no interior do triângulo XYZ , de modo que r_A, r_B, r_C sejam tangentes comuns internas aos círculos correspondentes. Sejam s_A a reta tangente internamente a ω_B, ω_C que não contém r_A , s_B a reta tangente internamente a ω_C, ω_A que não contém r_B e s_C a reta tangente internamente a ω_A, ω_B que não contém r_C . Prove que s_A, s_B, s_C têm um ponto comum Q , e prove que P e Q são conjugados isogonais no triângulo XYZ , ou seja, as retas XP e XQ são simétricas com relação à bissetriz interna de $\angle YXZ$ e as retas YP e YQ são simétricas com relação à bissetriz interna de $\angle XYZ$.

Solução: Sejam R_A, R_B, R_C os raios de $\omega_A, \omega_B, \omega_C$, respectivamente, e sejam:

$$X' = YZ \cap r_A; Y' = ZX \cap r_B; Z' = XY \cap r_C$$

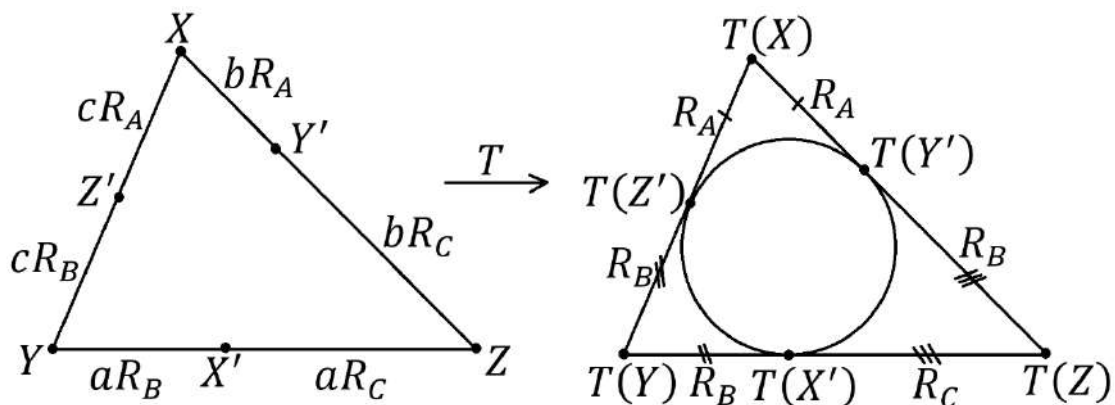


Note que, como r_A, s_A são tangentes internas a ω_B, ω_C , temos que elas se intersectam em X' . Além disso, por semelhança entre os triângulos $X'YT_Y$ e $X'ZT_Z$ (T_Y e T_Z são pontos de tangência), temos que:

$$\frac{YX'}{X'Z} = \frac{YT_Y}{ZT_Z} = \frac{R_B}{R_C}$$

Analogamente, $\frac{ZY'}{Y'X} = \frac{R_C}{R_A}$ e $\frac{XZ'}{Z'Y} = \frac{R_A}{R_B}$. Agora, considere uma transformação afim T do plano no plano, que leva o triângulo XYZ no triângulo $T(X)T(Y)T(Z)$, de medidas:

$$T(Y)T(Z) = R_B + R_C; T(Z)T(X) = R_C + R_A; T(X)T(Y) = R_A + R_B;$$



Como a transformação afim preserva colinearidade e preserva proporção de segmentos colineares, temos que $T(X') \in T(Y)T(Z)$, $T(Y') \in T(Z)T(X)$, $T(Z') \in T(X)T(Y)$ e:

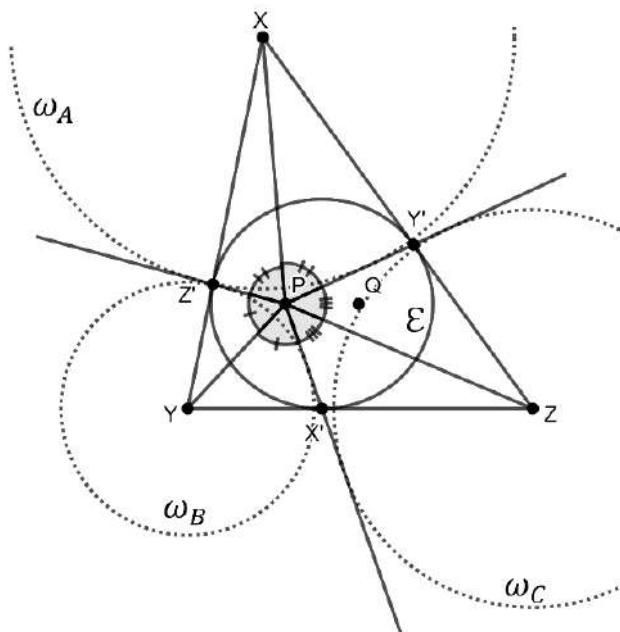
$$\frac{T(Y)T(X')}{T(X')T(Z)} = \frac{YX'}{X'Z} = \frac{R_B}{R_C} \Rightarrow T(Y)T(X') = R_B; T(X')T(Z) = R_C$$

E de modo semelhante:

$$T(Z)T(Y') = R_C; T(Y')T(X) = R_A;$$

$$T(X)T(Z') = R_A; T(Z')T(Y) = R_B;$$

Dessa forma, $T(X'), T(Y'), T(Z')$ são os pontos de tangência do incírculo Γ do triângulo $T(X)T(Y)T(Z)$. Assim, ao aplicarmos a operação inversa T^{-1} , $T^{-1}(\Gamma)$ é levado numa elipse \mathcal{E} , tangente aos lados de XYZ em X', Y', Z' , respectivamente (Exemplo 7).



Como $\angle Y'PX = \angle Z'PX$ (pois PX é bissetriz interna do ângulo formado por $r_B = PY'$ e $r_C = PZ'$), e, de modo semelhante, $\angle Z'PY = \angle X'PY$ e $\angle X'PZ = \angle Y'PZ$, temos que P é um dos focos da elipse \mathcal{E} , pois se não fosse, ao menos uma das retas PX', PY', PZ' não seria tangente a $\omega_A, \omega_B, \omega_C$. Seja Q o outro foco. Como X' é ponto de tangência da elipse, temos $\angle QX'Y = \angle PX'Z$, isto é, $QX' = s_A$. Analogamente, $QY' = s_B$ e $QZ' = s_C$, donde s_A, s_B, s_C concorrem em Q .

Além disso, temos que, como XY' e XZ' são tangentes à elipse \mathcal{E} por X , então $\angle PXZ = \angle QXY$, ou seja, no triângulo XYZ , XP e XQ são cevianas isogonais. Analogamente, YP e YQ são cevianas isogonais, bem como ZP e ZQ . Assim, P e Q são conjugados isogonais, encerrando o problema ■

Agora que você está altamente treinado nas artes obscuras da transformação afim, pratique as técnicas aprendidas e destrua todos problemas a seguir. Bons estudos!

6. Problemas Propostos

Problema 1: Determine a matriz que representa a reflexão do plano em torno da reta $x + y = 2$ em coordenadas homogêneas.

Problema 2: Seja $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação afim tal que:

$$F(1,1) = (3, -4); F(0,2) = (-1, -1); F(-1,1) = (1,0)$$

- Determine a matriz que representa F em coordenadas homogêneas.
- Determine $F(6, -8)$
- Se T é um triângulo de área 5, qual é a área de $F(T)$?

Problema 3: (a) Prove que, para quaisquer dois paralelogramos, existe uma transformação afim que leva um no outro.

(b) Prove que, para quaisquer duas elipses, existe uma transformação afim que leva uma na outra. Deduza um resultado similar para duas hipérbolas e duas parábolas.

Problema 4: Seja ABC um triângulo, e sejam D, E, F pontos sobre BC, CA, AB , respectivamente, tais que AD, BE, CF concorrem. Prove que $4 \cdot [DEF] \leq [ABC]$ e determine quando ocorre a igualdade.

Problema 5: Seja ABC um triângulo de área 1. Os pontos E, F, G estão nos lados BC, CA, AB , respectivamente, tais que AE bissecta BF em R , BF bissecta CG em S e CG bissecta AE em T . Determine a área do triângulo RST .

Problema 6: (a) Considere um bolo no formato de um triângulo. Cortamos esse bolo através das retas de trissecção, isto é, retas que partem de um vértice e dividem o lado oposto em três segmentos de mesmo comprimento. Mostre que, com os pedaços obtidos, podemos dividir o bolo igualmente para cinco pessoas.

(b) Considere o pedaço hexagonal do bolo. Prove as suas três diagonais ligando vértices opostos são concorrentes.

Problema 7 (Centros de Massa e Transformações Afim): (a) Considere uma elipse \mathcal{E} de centro O e seja T uma transformação afim. Prove que o centro da elipse $T(\mathcal{E})$ é o ponto $T(O)$.

(b) Seja P um polígono, G seu centro de massa e seja T uma transformação afim. Prove que o centro de massa de $T(P)$ é $T(G)$.

(c) Seja \mathcal{E} uma elipse fixa e sejam P um polígono tal que P circunscreve \mathcal{E} . Prove que, dentre todos os polígonos P com essa propriedade, o que possui área mínima é aquele cujo centro de massa coincide com o centro de \mathcal{E} .

(d) Seja \mathcal{E} uma elipse fixa e sejam P um polígono tal que P está inscrito em \mathcal{E} . Prove que, dentre todos os polígonos P com essa propriedade, o que possui área máxima é aquele cujo centro de massa coincide com o centro de \mathcal{E} .

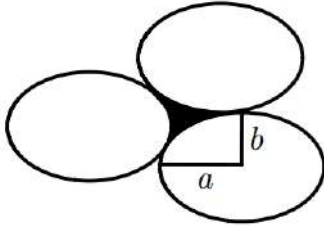
Problema 8: Determine a maior área possível de uma elipse que está inscrita num triângulo retângulo de catetos medindo 3 e 4.

Problema 9: Prove que todas as cordas de uma elipse que determinam, juntamente com a elipse, uma região de área constante, são tangentes a uma elipse concêntrica e similarmente orientada à elipse original.

Observação: Dizemos que duas elipses são similarmente orientadas se seus eixos maiores são paralelos e a proporção entre as medidas de seus respectivos eixos é a mesma.

Problema 10: Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e seja ε uma elipse que tangencia internamente os quatro lados de $ABCD$. Prove que o centro dessa elipse está na reta que liga os pontos médios das diagonais de $ABCD$.

Problema 11: Suponha que uma elipse tangencia os lados AB, BC, CD, DA de um paralelogramo $ABCD$ nos pontos P, Q, R, S , respectivamente. Prove que $\frac{CQ}{QB} = \frac{CR}{RP}$.



Problema 12: Considere três elipses que são congruentes, orientadas de forma semelhante (ou seja, todos os eixos maiores são paralelos), e que se tocam externamente dois a dois, como na figura. Prove que a área do triângulo curvilíneo delimitado por eles (a área sombreada na figura) é independente da posição das elipses. Em seguida, encontre a área do triângulo curvilíneo se o comprimento de cada eixo maior é $2a$ e o comprimento de cada eixo menor é $2b$.

Problema 13 (Teste IMO – Romênia/2007): Seja $A_1A_2A_3A_4A_5$ um pentágono convexo, tal que:

$$[A_1A_2A_3] = [A_2A_3A_4] = [A_3A_4A_5] = [A_4A_5A_1] = [A_5A_1A_2]$$

Prove que existe um ponto M no plano do pentágono tal que:

$$[A_1MA_2] = [A_2MA_3] = [A_3MA_4] = [A_4MA_5] = [A_5MA_1]$$

Problema 14 (França/1996): Seja ABC um triângulo e seja l uma reta variável, não paralela a nenhum de seus lados. Para cada reta l , seja G_l o centro de massa dos três pontos que são as interseções de l com os lados de ABC . Determine o lugar geométrico dos pontos G_l quando l varia.

Problema 15: Seja ABC um triângulo e seja O seu circuncentro. Sejam D, E, F os simétricos de A, B, C relativos a O , respectivamente. As retas AE, AF intersectam a reta BC em A_1, A_2 , respectivamente; as retas BF, BD intersectam a reta CA em B_2, B_1 , respectivamente; e as retas CD, CE intersectam a reta AB em C_1, C_2 , respectivamente. Prove que os baricentros dos triângulos $ADC_1, ADB_1, BEA_1, BEC_2, CFB_2, CFA_2$ estão numa mesma elipse.

Problema 16: Seja \mathcal{E} uma elipse, que não é uma circunferência, e sejam X, Y, Z pontos distintos de \mathcal{E} . As tangentes a \mathcal{E} por Y, Z se intersectam em A , as tangentes a \mathcal{E} por Z, X se intersectam em B e as tangentes a \mathcal{E} por X, Y se intersectam em C . As retas BY e CZ se intersectam num ponto P no interior de \mathcal{E} . Seja X' a interseção de AP com \mathcal{E} , Y' a interseção de BP com \mathcal{E} , Z' a interseção de CP com \mathcal{E} . Sejam ainda $\Gamma_X, \Gamma_Y, \Gamma_Z$ os circuncírculos dos triângulos $X'YZ, Y'ZX, Z'XY$, respectivamente. Prove $\Gamma_X, \Gamma_Y, \Gamma_Z, \mathcal{E}$ possuem um ponto em comum se, e somente se, P é o centro de \mathcal{E} .

Problema 17 (Iran RMM TST/2020): Uma circunferência ω está no interior do triângulo ABC . As tangentes de A a ω intersectam BC em A_1, A_2 . Defina B_1, B_2, C_1, C_2 de maneira similar. Prove que se cinco dos seis pontos $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ estão numa circunferência, então o sexto ponto também está nessa circunferência.