Semana Olímpica 2021
Combinatória Geométrica
Nível 3

Samuel Feitosa

Exercício 1. Dados $2n+3$ pontos no plano, não três colineares e não quatro concíclicos. Prove que nós podemos escolher 3 desses pontos de modo que o circuncírculo deles contenha n dos pontos restantes em seu inteiror e n no seu exterior.

Exercício 2. (Rússia) É possível colocarmos 1965 pontos em um quadrado de lado 1 de tal maneira que qualquer retângulo de área $\dfrac{1}{200}$ contido no quadrado e com lados paralelos aos lados do quadrado contenha pelo menos um desses pontos?

Exercício 3. Seja M a maior distância entre seis pontos distintos no plano, e seja m a menor de suas distâncias mútuas. Prove que $\dfrac{M}{m} \geq \sqrt{3}$.

Exercício 4. Em um círculo de raio 16 existem 650 pontos. Prove que existe um anel de raio interno 2 e raio externo 3 que contém não menos que 10 dos dados pontos.

Exercício 5. Dado um conjunto de N discos de raios unitários. Esses círculos podem se intersectar (mas não coincidir). Mostre que existe um arco de comprimento maior ou igual a $2\pi/N$ pertencendo à circunferência de um desses discos que não é coberto por nenhum outro disco.

Exercício 6. (Rioplatense 2002) Daniel escolhe um inteiro positivo n e diz a Ana. Com esta informação, Ana escolhe um inteiro k e diz a Daniel. Daniel traça então n circunferências em um papel e escolhe k pontos distintos com a condição de que cada um deles pertença a alguma das circunferências que traçou. Em seguida, apaga as circunferências que traçou, sobrando visíveis apenas os k pontos que marcou. A partir desses pontos, Ana deve reconstruir pelo menos uma das circunferências que traçou Daniel. Determinar qual o menor valor de k que permite Ana alcançar seu objetivo independente como Daniel escolha as n circunferências e os k pontos.

Exercício 7. (Putnam 1979) Sejam $2n$ pontos no plano escolhidos de modo que quaisquer 3 não são colineares, n deles são pintados de vermelho e n deles são pintados de azul. Prove que é possível parear os pontos usando segmentos ligando cada ponto vermelho a cada ponto vermelho a exatamente um ponto azul de modo que esses segmentos não se cortem.

Exercício 8. (Ibero 97) Seja $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_{1997}\}$ um conjunto com 1997 pontos no interior de um círculo de raio 1, com P_1 sendo o centro do círculo. Para $k = 1, 2, \ldots, 1997$, seja x_k a distância de P_k ao ponto de P mais próximo de P_k. Mostre que

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{1997}^2 \leq 9.$$

Exercício 9. (IMO 89) São dados n e k inteiros positivos e um conjunto S de n pontos no plano tais que

a) não há três pontos em S colineares,

b) Para qualquer ponto P de S existem pelo menos k pontos de S equidistantes de P.

Prove que

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$$

Exercício 10. (Cone Sul 1999) É dado um quadrado de lado 1. Mostre que, para cada conjunto finito de pontos no perímetro do quadrado, podemos achar um vértice do mesmo com a seguinte propriedade:
a média aritmética dos quadrados das distâncias de tal vértice aos pontos do conjunto é maior ou igual a $3/4$.

Exercício 11. (Cone Sul 2000) Um quadrado de lado 2 é dividido em retângulos mediante várias retas paralelas aos lados (algumas horizontais e outras verticais). Os retângulos são coloridos alternadamente de branco e preto, como em um tabuleiro de xadrez. Se deste modo a área branca resultou igual à área preta, mostre que ao recortar os retângulos pretos ao longo de seus bordos é possível formar com os mesmos (sem superposição) um retângulo preto 1×2.

Exercício 12. Um polígono de área S está contido no interior de um quadrado de lado a. Demonstre que há pelo menos dois pontos do polígono que estão separados por uma distância maior ou igual a S/a.

Exercício 13. (Cone Sul 2010) Clipar um n-ágono convexo significa escolher um par de lados coonsecutivos AB, BC e trocá-los por três segmentos AM, MN e NC, onde M é o ponto médio de AB e N é o ponto médio de BC. Em outras palavras, cortamos o triângulo MBN para obtermos um $(n+1)$-ágono convexo. Um hexágono regular $\mathcal{P}_6$ de área 1 é clipado para obtermos um heptágono $\mathcal{P}_7$. Então $\mathcal{P}_7$ é clipado de uma das 7 poossíveis maneiras para obtermos um octágono $\mathcal{P}_8$, e assim sucessivamente. Prove que não importa como as clipagens aconteçam, a área de $\mathcal{P}_n$ é maior que $\frac{2}{3}$ para todo $n \geq 6$.

Exercício 14. Um quadrado de lado 1 é coberto por 3 discos congruentes de raio r. Mostre que $r \geq \frac{\sqrt{65}}{16}$.

Exercício 15. (Asian Pacific 1999) Seja S um conjunto de $2n+1$ pontos no plano tal que não existem três colineares e nem quatro concíclicos. Um círculo será chamado de bom se tem três pontos de S sobre sua circunferência, $n-1$ pontos em seu interior e $n-1$ pontos em seu exterior. Prove que o número de círculos bons tem a mesma paridade que n.

Exercício 16. São desenhados N círculos no plano passando por um ponto P, não havendo dois círculos tangentes, e por todo ponto de interseção de dois tais círculos (distinto de P) passa pelo menos mais um círculo. Prove que todos os círculos passam por dois pontos distintos P e A.

Exercício 17. (Vingança Olímpica 2005) Encontre todos os conjuntos finitos X de pontos no plano, não todos colineares, satisfazendo a seguinte condição: para quaisquer duas circunferências distintas, cada uma passando por três pontos distintos de X, a interseção delas também está contida em X.

Exercício 18. (Banco IMO 93) Dados $2n+3$ pontos num plano, não havendo três colineares nem quatro concíclicos, prove que podemos escolher três deles de modo o círculo passando por estes tem n dos pontos restantes no seu interior e n no exterior.

Exercício 19. (Cone Sul 2009) Pablo tem uma certa quantidade de retângulos cujas áreas somam 3 e cujos lados são todos menores ou iguais a 1. Demonstre que com esses retângulos é possível cobrir um quadrado de lado 1 de modo que os lados dos retângulos sejam paralelos aos lados do quadrado.
Nota: Os retângulos podem estar sobrepostos e podem sair parcialmente do quadrado.

Exercício 20. (Teorema de Bolyai/Gerwin) Dadas quaisquer duas superfícies poligonais com mesma área, podemos transformar uma na outra cortando a primeira em um número finito de pedaços e movendo-os por meio de isometeias para cobrir sem sobreposição a segunda figura.

Exercício 21. (IMO 1972) Prove que qualquer quadrilátero cíclico pode ser dissecado em n quadriláteros cíclicos, para todo $n \geq 4$.

Exercício 22. (Kvant) Um polígono regular de $4n$ lados com lado 1 foi decomposto em paralelogramos. Prove que existe pelo menos um retângulo na decomposição. Encontre a soma das áreas de todos os retângulos da decomposição.

Exercício 23. (Torneio das Cidades 1983) Um polígono regular de $4n$ lados é particionado em paralelogramos. Prove que entre eles existe pelo menos um retângulo.

Exercício 24. (Olímpiada Russa) As duas pernas de um compasso estão localizadas em pontos de coordenadas inteiras disintos de um plano cartesiano. A distância entre duas pernas não pode ser alterada. É permitido fixar uma das pernas e mover a outra para qualquer ponto de coordenadas inteiras. É possível trocar entre si as posições das duas pernas após um número finito de operações?

Exercício 25. (IMO 2016) Seja $P = A_1A_2\ldots A_k$ um polígono convexo no plano. Os vértices $A_1, A_2, \ldots, A_k$ têm coordenadas inteiras e pertencem a uma circunferência. Seja S a área de P. Seja n um inteiro positivo ímpar tal ue os quadrados dos comprimentos dos lados de P sejam todos números inteiros divisíveis por n. Demonstre que $2S$ é um inteiro divisível por n.

Exercício 26. (Banco IMO 1981) Um conjunto finito de círculos unitários é dado no plano de modo que a área total da união deles é S. Prove que existe um subconjunto de círculos mutuamente disjuntos tal que a área de sua união é maior que $2S/9$.

Exercício 27. Existem $N \geq 3$ pontos no plano. As distâncias entre quaisquer dois desses pontos podem assumir no máximo n valores diferentes. Prove que $N \leq (n+1)^2$.

Exercício 28. (Olimpíada Russa) Existem duas circunferências, cada uma com $1000\,cm$ de comprimento. Existem 1000 pontos marcados sobre o primeiro círculo. Sobre o segundo são marcados arcos de modo que a soma dos seus comprimentos é menor que 1. Prove que é possível posicionar a primeira circunferência sobre a segunda de modo que nenhum ponto marcado esteja sobre um arco.

Exercício 29. Prove que existe um conjunto S de 3^{1000} pontos no plano tal que, para cada ponto P de S, existem pelo menos 2000 pontos em S cuja distância para P é exatamente uma unidade.

Exercício 30. São dados 100 pontos no plano. Mostre que podemos cobrir estes pontos com alguns círculos disjuntos, de tal maneira que a soma dos diâmetros destes é menor que 100, e a distância entre quaisquer dois círculos é maior que 1.

Exercício 31. (IMO 2006) Uma diagonal de um polígono regular P de 2006 lados é um segmento bom se separa P em duas partes, cada uma tendo um número ímpar de lados de P. Os lados de P também são segmentos bons.

Divide-se P em triângulos, traçando-se 2003 diagonais tais que, duas a duas, não se cortam no interior de P. Determine o maior número de triângulos isósceles nos quais dois lados são segmentos bons que podem aparecer numa divisão como essa.

Exercício 32. (IMO 2011) Seja $\mathcal{S}$ um conjunto finito de dois ou mais pontos do plano. Em $\mathcal{S}$ não há três pontos colineares. Um moinho de vento é um processo que comeca com uma reta ℓ que passa por um único ponto $P \in \mathcal{S}$. Roda-se ℓ no sentido dos ponteiros do relógio ao redor do pivot P até que a reta encontre pela primeira vez um outro ponto de $\mathcal{S}$, que denotaremos por Q. Com Q como novo pivot, a reta continua a rodar no sentido dos ponteiros do relógio até encontrar outro ponto de $\mathcal{S}$. Este processo continua sem parar, sendo sempre o pivot algum ponto de $\mathcal{S}$.

Exercício 33. Duas pessoas, A e B, jogam uma variante do jogo "frio ou quente": inicialmente B coloca uma caixa de bombons em algum lugar do plano e informa a A que a caixa está a uma distância de no máximo 2001 da posição inicial de A. Como ele é miope, só consegue ver a caixa se ela estiver a uma distância menor ou igual a 1 dele. O objetivo de A é encontrar a caixa com a menor sequência de passos de comprimento menor ou igual a 1, que podem ser dados em qualquer direção. Depois de cada passo, A pode perguntar a B: "quente ou frio"? E B deve responder. A resposta será "quente"se o ponto final do último passo dado por A está mais próximo da caixa que o ponto inicial e será frio em qualquer outro caso. Prove que A pode encontrar a caixa fazendo no máximo 2016 passos e perguntando no máximo 13 vezes.

Exercício 34. Determine o menor número real r para o qual seja possível cobrir um triângulo equilátero de lado 1 com seis círculos de raio r.

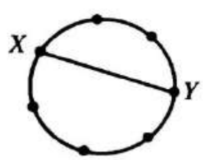
Exercício 35. Em um plano existem 6 pontos fixos e em cada ponto existe um farol que ilumina o interior de um ângulo de 60° cujo vértice é o ponto fixo. Prove que podemos rotacionar os faróis de modo que eles iluminem o plano inteiro.

Exercício 36. Considere $2n$ pontos em um plano. Prove que existe um círculo cujo interior contém exatamente n desses pontos.

Exercício 37. Dado $\epsilon > 0$, prove que existe um triângulo equilátero cujos vértices estão em três discos distintos de raio ϵ com centros em pontos de coordenadas inteiras de um plano cartesiano.

Exercício 38. Geislan desenhou algumas diagonais de um polígono de modo que que o polígono ficou dividido em triângulos. Mostre que Davi pode pintar os vértices do polígono de três cores de modo que não existam dois vértices de um triângulo da mesma cor.

Exercício 39. (IMO 1990) Suponha que um conjunto S de $2n-1$ pontos distintos, $n \geq 3$, é marcado ao redor de uma circunferência. Cada par de pontos de S determina dois *arcos de corte* sobre a circunferência cujos interiores contém vários números de pontos de S, que naturalmente variam com as escolhas dos pontos. Na figura a seguir, (X, Y) corta a circunferência em arcos contendo 2 e 3 pontos.



Qual é o menor inteiro positivo k tal que todo subconjunto de k pontos de S contém dois pontos que determiam um arco de corte com exatamente n pontos de S em seu interior?

Exercício 40. (Torneio das Cidades 1983) Considere um n-ágono regular com k de seus vértices pintados. Uma coloração é chamada de quase uniforme se, para todo inteiro positivo m, a seguinte condição é satisfeita:

Se M_1 é um conjunto de m vértices consecutivos de P e M_2 é outro tal conjunto, então o número de vértices coloridos em M_1 difere do número de vértices coloridos em M_2 por no máximo uma unidade.

Prove que para todos inteiros positivos k e n com $(k \leq n)$ uma coloração quase uniforme existe e é única a menos de rotações.

Exercício 41. (RMM) Um ponto látice no plano Cartesiano é um ponto cujas coordenadas são ambas inteiras. Um polígono látice é um polígono em que todos os vértices são pontos látices. Seja Γ um polígono látice convexo. Prove que Γ está contido em um polígono látice convexo Ω tal que os vértices de Γ estão todos sobre a borda de Ω e exatamente um vértice de Ω não é um vértice de Γ.

Exercício 42. (Banco IMO) Existem n pontos $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ao redor de uma circunferência de comprimento $100m$ e em cada um deles existe um carrinho de bate-bate, denotados por $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Cada carrinho vai escolher um sentido e começar uma trajetória com velocidade constante de $100m/h$. Quando dois carros se chocam, eles invertem o sentido do deslocamento. Prove que em algum momento no futuro a configuração original será recuperada, isto é, cada carro estará na sua posição inicial e com sua velocidade original.

Exercício 43. (Teste de Seleção da Romênia para a IMO 1978) Seja M um conjunto com $3n$ pontos no plano tal que a maior distância entre quaisquer dois desses pontos é 1 unidade. Prove que

a) Para quaisquer 4 pontos de M a distância entre algum par de pontos é pelo menos $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Algum círculo de raio menor ou igual a $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cobre todo o conjunto M.

c) Existe algum par entre os $3n$ pontos de M cuja distância entre eles é no máximo

$$\frac{4}{3\sqrt{n}-\sqrt{3}}$$