Técnicas em Desigualdades

Semana Olímpica 2021 - Teresina - PI

Rafael Filipe - rafaelfilipedoss@gmail.com

O intuito deste material é apresentar algumas técnicas em desigualdades relacionadas ao estudo de funções, envolvendo a de análise crescimento, convexidade, máximos e mínimos de uma função. Para isso, utilizaremos algumas ferramentas de cálculo.

1 Definições e Ideias Iniciais

1.1 Relembrando Algumas Substituições

Trocar variáveis pode ser interessante em desigualdades, para transformá-las em expressões mais familiares. Relembremos primeiro duas substituições que você provavelmente já usou bastante:

Lema 1.1. Se $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 1$, então existem $x_1, x_2, \cdots, x_n$ não nulos tais que $a_i = \frac{x_i}{x_{i+1}}$, em que $x_{n+1} = x_1$.

Lema 1.2. Se a, b, c são lados de um triângulo, então existem $x, y, z > 0$ tais que $a = x+y$, $b = x+z$ e $c = y+z$.

Outra substituição que pode ser útil é a mudança de denominadores "feios" por outras variáveis. Feito isso, calculamos as variáveis antigas em termos das novas por meio de um sistema. Isso pode ser legal pois tira somas dos denominadores.

Não esqueçamos das substituições trigonométricas. Alguma relação entre números reais pode estar se referendo a alguma identidade trigonométrica, quando por exemplo fazemos a substituição $x = \tan\theta$ (lembre-se que tangente é uma função sobrejetora).

Lema 1.3. Se $|x| \le L$, então $x = L\cos(\theta)$, para algum $\theta \in [0, 2\pi)$.

Exemplo 1.4. (Treinamento Cone Sul 2006) Os números reais $x_1, x_2, \cdots, x_n$ pertencem ao intervalo $[-1, 1]$ e a soma de seus cubos é igual a zero. Prove que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \le \frac{n}{3}.$$

Solução: Como $x_i \in [-1, 1]$, podemos escrever $x_i = \cos(\theta_i)$, com $\theta_i \in [0, 2\pi)$. Agora note que

$$x_i = \cos(\theta_i) = \frac{4\cos(\theta_i)^3 - \cos(3\theta_i)}{3}.$$

Portanto:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \cos(\theta_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{4\cos(\theta_i)^3 - \cos(3\theta_i)}{3} = \frac{1}{3}\left(4\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - \sum_{i=1}^{n}\cos(3\theta_i)\right) = -\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\cos(3\theta_i) \le \frac{n}{3}.$$

já que $-\cos(x) \le 1$. $\square$

Exemplo 1.5. Sejam x, y, z reais positivos tais que $x+y+z = xyz$. Fazendo $x = \tan(\alpha)$, $y = \tan(\beta)$ e $z = \tan(\gamma)$, com $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ (pois $x, y, z > 0$), temos

$$x + y + z = xyz \iff \tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma) = \tan(\alpha)\tan(\beta)\tan(\gamma).$$

Notemos então que

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\gamma)}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan(\gamma)} = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)+\tan(\gamma)-\tan(\alpha)\tan(\beta)\tan(\gamma)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)-\tan(\beta)\tan(\gamma)-\tan(\gamma)\tan(\alpha)} = 0.$$

Portanto, $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, ou seja, são ângulos de um triângulo.

Exemplo 1.6. Uma última substituição que pode ser interessante é $a = e^x$, quando $a > 0$. Por exemplo, se $abc = 1$ com $a, b, c > 0$, podemos fazer $a = e^x$, $b = e^y$ e $c = e^z$. Mudamos então nossa condição para $x + y + z = 0$.

1.2 Homogeneização

Definição 1.7. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é *homogênea* se

$$f(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad \forall\ t \in \mathbb{R},$$

para algum inteiro $k \geq 0$ fixado.

Dessa forma, pensando numa desigualdade nas variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_n$ como uma coisa do tipo $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq 0$, caso f seja homogênea, basta analisarmos os casos em que $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ ou $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = S$, para algum $S \neq 0$ fixado, sendo g uma função homogênea qualquer.

Exemplo 1.8. A desigualdade entre as médias aritmética e geométrica pode ser reescrita como

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n - n\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq 0.$$

Note que

$$f(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n) = tx_1 + tx_2 + \cdots + tx_n - n\sqrt[n]{tx_1 tx_2 \cdots tx_n} = tf(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

e então, como $x_i > 0$, podemos supor sem perda de generalidade que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ ou que $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ (mas nunca as duas simultaneamente) e então para prová-la basta verificar a desigualdade nestes casos.

2 Mixing Variables

Em problemas de desigualdade, pode ser bastante útil estudar os casos de igualdade. Suponha que queremos mostrar que $f(a, b, c) \geq 0$ para alguma função f com a condição $abc = 1$. Se verificamos que o caso de igualdade ocorre quando dois ou mais variáveis são iguais, intuitivamente, pode-se pensar que quando as variáveis se aproximam provavelmente f irá diminuir.

A ideia do método *mixing variables* é justamente aproximar as variáveis e tentar concluir que de fato a função irá diminuir. Por exemplo, podemos tentar provar que $f(a, b, c) \geq f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c)$.

Veja que no lado direito ainda temos o produto das entradas igual a 1. Mas por que provar isso é interessante? Porque, provado isso, agora é suficiente verificar que $f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c) \geq 0$.

Embora isso pareça feio, o interessante é que se fizermos $\sqrt{ab} = t$, então $abc = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{t^2}$, e passamos a querer provar que $f(t, t, \frac{1}{t^2}) \geq 0$, que é um problema em uma variável!

O cuidado principal que devemos ter é que nem sempre queremos aproximar quaisquer duas variáveis. Por conta disso, pode ser interessante tentar ordenar as variáveis e ver o que ocorre se aproximar as duas maiores, as duas menores ou algum outro par específico. Mas lembre-se que nem sempre podemos ordenar as variáveis. Só podemos fazer isso se a desigualdade for simétrica. Caso contrário, precisaremos dividir em casos.

Exemplo 2.1. (IMO SL 93) Sejam a, b, c, d reais não negativos tais que $a+b+c+d=1$. Prove que

$$abc+bcd+cda+dab \leq \frac{1}{27}+\frac{176}{27}abcd.$$

Solução: Como a expressão é simétrica, podemos supor, sem perda de generalidade, que $a \leq b \leq c \leq d$.

Seja

$$f(a,b,c,d) = abc+bcd+cda+dab-\frac{176}{27}abcd = ac(b+d)+bd\left(a+c-\frac{176}{27}ac\right).$$

Note que

$$f\left(a,\frac{b+d}{2},c,\frac{b+d}{2}\right)-f(a,b,c,d) = ac(b+d)+\left(\frac{b+d}{2}\right)^2\left(a+c-\frac{176}{27}\right)-ac(b+d)-bd\left(a+c-\frac{176}{27}ac\right)$$
$$=\left(\frac{b-d}{2}\right)^2\left(a+c-\frac{176}{27}ac\right)$$

Queremos verificar se o valor de f aumenta ao aproximarmos duas variáveis. Como $\left(\frac{b-d}{2}\right)^2 \geq 0$, basta verificarmos que $a+c-\frac{176}{27}ac \geq 0$. Como a desigualdade é simétrica, podemos supor, sem perda de generalidade, que $a \leq b \leq c \leq d$. Logo, temos que

$$2(a+c) \leq a+b+c+d = 1 \Rightarrow a+c \leq \frac{1}{2}.$$

Portanto, temos que

$$\frac{a+c}{ac} \geq \frac{4}{a+c} \geq 8 > \frac{176}{27}.$$

Então, concluímos que se $a \leq b \leq c \leq d$, então

$$f\left(a,\frac{b+d}{2},c,\frac{b+d}{2}\right) \geq f(a,b,c,d).$$

Note que de modo análogo ao feito para $a+c$, também temos $a+b \leq \frac{1}{2}$. Portanto conseguimos prosseguir do mesmo modo acima para concluir que, ao se igualar c e d, também aumentamos o valor da expressão.

Portanto, sendo $t=\frac{b+c+d}{3}$, temos que $f(a,t,t,t) \geq f(a,b,c,d)$. Como $a = 1-3t$, basta verificarmos que

$$f(1-3t,t,t,t) \leq \frac{1}{27} \iff 528t^4-392t^3+81t^2-1 \leq 0.$$

Fazendo $t=\frac{1}{3}$, temos $a=0$ e é um caso de igualdade. Logo, $\frac{1}{3}$ deve ser raiz do polinômio acima (por isso é interessante estudar alguns casos de igualdade, podem facilitar as contas!). Finalmente, temos:

$$528t^4-392t^3+81t^2-1 \leq 0 \iff (3t-1)(176t^3-72t^2+3t+1) \leq 0.$$

Pelo teste da raiz racional em $g(t) = 176t^3 - 72t^2 + 3t + 1$, vemos que $\frac{1}{4}$ é raiz e podemos fatorar.

$$\begin{aligned}(3t-1)(176t^3 - 72t^2 + 3t + 1) \leq 0 &\iff (3t-1)(4t-1)(44t^2 - 7t - 1) \leq 0\\ &\iff (3t-1)(4t-1)^2(11t+1) \leq 0\end{aligned}$$

Como $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$, temos o desejado e vemos que a igualdade ocorre quando $t = \frac{1}{4}$ ou $t = \frac{1}{3}$, ou seja, $(a, b, c, d) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ ou $(a, b, c, d) = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. $\square$

Estudaremos análise de crescimento e estudo dos máximos e mínimos de uma função nas próximas seções. Mas adiantaremos a ideia aqui.

Desejamos mostrar que $g(t) \geq 0$ no intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right]$. Calculando a derivada, temos $g'(t) = 3(176t^2 - 48t + 1) = 3(44t-1)(4t-1)$. Como o coeficiente líder é positivo, segue que $\frac{1}{44}$ será um ponto de máximo local e $\frac{1}{4}$ é um ponto de mínimo local.

Dado um intervalo $[a, b]$, o mínimo global de uma função neste intervalo ocorrerá sempre em um dos mínimos locais ou nos extremos. Logo, basta calcular o valores de g em $0, \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ e verificaremos que todos os valores são maiores ou iguais a 0, de modo que $g(t) \geq 0$, concluindo o desejado.

3 Monotonicidade

Definição 3.1. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é *crescente* se $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ para $x, y \in I$. Se vale a desigualdade estrita, dizemos que f é *estritamente crescente*. Dizemos que f é decrescente se $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ para $x, y \in I$. Se vale a desigualdade estrita, dizemos que f é *estritamente decrescente*. Dizemos que f é *monótona* se ela é crescente em I ou decrescente em I.

Em geral, para verificar se uma função é crescente, utilizamos o seguinte resultado:

Teorema 3.2. Uma função diferenciável $f : I \to \mathbb{R}$ é crescente em I se, e somente se, $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Se vale $f'(x) > 0$, então f é estritamente crescente. A função f será decrescente em I se, e somente se, $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$. Se vale $f'(x) < 0$, então f é estritamente decrescente.

Exemplo 3.3. Sejam a, b, c reais positivos tais que $abc = 1$. Prove que

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a^3 + b^3 + c^3.$$

Solução: Seja $f(t) = a^t + b^t + c^t$. Note que

$$f'(t) = a^t \ln(a) + b^t \ln(b) + c^t \ln(c) \Rightarrow f''(t) = a^t \ln(a)^2 + b^t \ln(b)^2 + c^t \ln(c)^2 > 0.$$

Pelo **teorema 3.2**, f' é crescente. Portanto, para $t \geq 0$:

$$f'(t) \geq f'(0) = \ln(a) + \ln(b) + \ln(c) = \ln(abc) = \ln(1) = 0.$$

Portanto, f também é crescente. Em particular, $f(3) \geq f(2)$, como queríamos. $\square$

4 Convexidade

Definição 4.1. Dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa se seu gráfico se situa abaixo de qualquer uma de suas secantes, ou seja, se $a < x < b$, com $]a, b[\subset I$, então:

$$a < x < b \Rightarrow f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Uma função será chamada côncava se valer o sinal invertido.

Em geral, para verificar se uma função é convexa num intervalo I, podemos usar o resultado a seguir:

Teorema 4.2. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$, duas vezes diferenciável no intervalo I, é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. De modo semelhante, f será côncava se, e somente se, $f''(x) \leq 0$.

4.1 Jensen e Karamata

Teorema 4.3. (Jensen) Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então, para quaisquer $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$ e para quaisquer reais não negativos $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ com $\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = 1$, temos

$$\omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2) + \cdots + \omega_n f(x_n) \geq f(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \cdots + \omega_n x_n).$$

Se f é côncava, o sinal da desigualdade se inverte.

Exemplo 4.4. (médias com pesos) Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$ reais positivos e $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ reais positivos com $\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = 1$. Então

$$\omega_1 a_1 + \omega_2 a_2 + \cdots + \omega_n a_n \geq a_1^{\omega_1} a_2^{\omega_2} \cdots a_n^{\omega_n}.$$

Demonstração: Seja $f(x) = -\ln(x)$. Note que $f'(x) = -\frac{1}{x} < 0$ e $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ para $x > 0$. Logo, pelos **teoremas 3.2 e 4.2**, f é decrescente e convexa para $x > 0$. Portanto, pela desigualdade de Jensen, obtemos:

$$-\omega_1 \ln(a_1) - \omega_2 \ln(a_2) - \cdots - \omega_n \ln(a_n) \geq -\ln(\omega_1 a_1 + \omega_2 a_2 + \cdots + \omega_n a_n)$$

$$-\ln(a_1^{\omega_1} a_2^{\omega_2} \cdots a_n^{\omega_n}) \geq -\ln(\omega_1 a_1 + \omega_2 a_2 + \cdots + \omega_n a_n)$$

$$a_1^{\omega_1} a_2^{\omega_2} \cdots a_n^{\omega_n} \leq \omega_1 a_1 + \omega_2 a_2 + \cdots + \omega_n a_n.$$

□

Exemplo 4.5. (IMO 2001) Sejam a, b, c reais positivos. Prove que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

Solução: Como a desigualdade é homogênea, podemos supor, sem perda de generalidade, que $a + b + c = 1$. Além disso, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ é convexa, pois $f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$. Logo, pela desigualdade de Jensen com pesos a, b, c, temos

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq \frac{1}{\sqrt{a(a^2 + 8bc) + b(b^2 + 8ca) + c(c^2 + 8ab)}} = \frac{1}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 + 24abc}}.$$

Logo, basta $a^3+b^3+c^3+24abc \le 1$. Por $MA-MG$, temos que

$$\begin{aligned} 1=(a+b+c)^3 &= a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a) \\ &\ge a^3+b^3+c^3+3(2\sqrt{ab})(2\sqrt{bc})(2\sqrt{ca}) = a^3+b^3+c^3+24abc, \end{aligned}$$

como desejado. □

Definição 4.6. Sejam $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n$ e $y_1 \ge y_2 \ge \cdots \ge y_n$ duas sequências tais que

$$x_1+x_2+\cdots+x_n = y_1+y_2+\cdots+y_n$$

e, para $k=1,2,\cdots,n-1$, temos

$$x_1+x_2+\cdots x_k \ge y_1+y_2+\cdots y_k.$$

Dizemos então que a sequência (x_n) majora a sequência (y_n) e denotamos por $(x_n) \succ (y_n)$.

Teorema 4.7. (Karamata) Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Se (x_n) majora (y_n), então

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) \ge f(y_1)+f(y_2)+\cdots+f(y_n).$$

Se f é côncava, o sinal da desigualdade se inverte.

Exemplo 4.8. Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$ reais positivos. Prove que

$$\frac{a_1^3}{a_2}+\frac{a_2^3}{a_3}+\cdots+\frac{a_n^3}{a_1} \ge a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2.$$

Solução: Seja $x_i = \ln(a_i)$. A desigualdade equivale a

$$e^{3x_1-x_2}+e^{3x_2-x_3}+\cdots+e^{3x_n-x_1} \ge e^{2x_1}+e^{2x_2}+\cdots+e^{2x_n}.$$

Como $f(x)=e^x$ é convexa, se mostrarmos que a sequência $3x_1-x_2, 3x_2-x_3, \cdots, 3x_n-x_1$ majora a sequência $2x_1, 2x_2, \cdots, 2x_n$ em alguma ordem, o resultado segue pela desigualdade de Karamata.

Para isso, suponha que

$$3x_{m_1}-x_{m_1+1} \ge 3x_{m_2}-x_{m_2+1} \ge \cdots \ge 3x_{m_n}-x_{m_n+1} \text{ e}$$

$$2x_{k_1} \ge 2x_{m_2} \ge \cdots \ge 2x_{m_n},$$

para certos $m_i, k_i \in \{1,2,\cdots,n\}$, em que $x_{n+1}=x_1$.

Agora veja $3x_{k_i}-x_{k_i+1} \ge 2x_{k_i}$ e então temos

$$(3x_{m_1}-x_{m_1+1})+\cdots+(3x_{m_s}-x_{m_s+1}) \ge (3x_{k_1}-x_{k_1+1})+\cdots(3x_{k_s}-x_{k_s+1}) \ge 2x_{k_1}+\cdots 2x_{k_s}.$$

A primeira desigualdade vem do fato de no lado esquerdo estarmos pegando as s maiores expressões da forma $3x_t-x_{t+1}$. A igualdade para o caso $s=n$ é evidente e o resultado segue. □

5 Truque da Reta Tangente

Uma definição equivalente de função convexa é que

$$f(x) \ge f(a)+f'(a)(x-a),$$

ou seja, que o gráfico de f está acima de qualquer tangente ao gráfico, já que $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ é a tangente ao gráfico no ponto $(a, f(a))$. No caso de a função ser côncava, novamente os sinais se invertem.

Um exemplo simples mas interessante disso é a desigualdade a seguir:

Teorema 5.1. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$e^x \geq x + 1.$$

Como $f(x) = e^x$ é convexa nos reais, vale o resultado acima para todo x, já que $y = x + 1$ é a reta tangente ao gráfico no ponto $(0, 1)$ (verifique!).

Nem sempre a função f que aparece na desigualdade é convexa ou côncava em todo o intervalo estudado. Mas pode ser que ainda assim consigamos mostrar que o gráfico está sempre acima de alguma reta tangente ao gráfico. Vejamos o exemplo a seguir

Exemplo 5.2. (Japão 1997) Sejam a, b, c reais positivos. Prove que

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Solução: Note que a desigualdade é homogênea e podemos supor sem perda de generalidade que $a + b + c = 3$. Então, o problema equivale a

$$\frac{(3-2a)^2}{a^2+(3-a)^2} + \frac{(3-2b)^2}{b^2+(3-b)^2} + \frac{(3-2c)^2}{c^2+(3-c)^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Note que $f(x) = \frac{(3-2x)^2}{x^2+(3-x)^2}$ não vai ser nem côncava e nem convexa em $(0, 3)$. A ideia é então procurar uma reta tangente ao gráfico tal que

$$f(x) \geq mx + n.$$

Note que, como estamos forçando que $mx + n$ seja uma cota intermediária, o caso de igualdade deve se manter. Como um dos casos de igualdade é $a = b = c = 1$, é natural tentarmos forçar que $y = mx + n$ seja a reta tangente em $(1, f(1))$. Temos que $f(1) = \frac{1}{5}$ e, portanto, a reta deve passar por $(1, \frac{1}{5})$, ou seja, $m + n = \frac{1}{5}$. Além disso, já que ela é tangente, devemos ter $m = f'(1) = -\frac{18}{25} \Rightarrow n = \frac{23}{25}$.

Portanto, basta verificarmos que para todo $x \in (0, 3)$ temos

$$f(x) \geq \frac{23-18x}{25} \iff 36x^3 - 54x^2 + 18 \geq 0.$$

Note que esse polinômio apareceu quando igualamos a reta tangente a f, de modo que o ponto de tangência deve ser raiz dupla dele. Logo:

$$36x^3 - 54x^2 + 18 \geq 0 \iff (x-1)^2(2x+1) \geq 0,$$

que é verdade.

Finalmente, temos que

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq -\frac{18}{25}(a+b+c) + 3 \cdot \frac{23}{25} = 3 \cdot \frac{23-18}{25} = \frac{3}{5}.$$

6 Máximos e Mínimos

Definição 6.1. Seja $f : I =]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então, $c \in I$ é um *ponto crítico* de f se $f'(c) = 0$.

Definição 6.2. Dizemos que $c \in I$ é um *ponto de mínimo local* se existe um $\delta > 0$ tal que $|c-x| < \delta \Rightarrow f(c) \leq f(x)$. Dizemos que $c \in I$ é um *ponto de máximo local* se existe um $\delta > 0$ tal que $|c-x| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(c)$.

Dois resultados importantes a respeito de pontos críticos são os seguintes:

Teorema 6.3. Seja $f : I =]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $c \in I$ é um ponto de máximo ou mínimo local, então $f'(c) = 0$, ou seja, então c é um ponto crítico de f.

Teorema 6.4. Seja $f : I =]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável. Se $c \in I$ é um ponto crítico, isto é, $f'(c) = 0$. Se $f''(c) < 0$, então f tem um ponto de máximo local em c. Se $f''(c) > 0$, então f tem um ponto de mínimo local em c.

Note entretanto que podemos ter $f''(c) = 0$ e c ainda ser um ponto de mínimo ou máximo local. Por exemplo, em $f(x) = x^4$, $x = 0$ é um ponto de mínimo local. Já no exemplo $f(x) = x^3$, temos que $f'(0) = f''(0) = 0$ mas 0 não é ponto de máximo e nem de mínimo local.

Resumindo, quando "derivamos e igualamos a 0", nem sempre os valores de x encontrados são todos de máximo ou de mínimo local. Um jeito prático de descobrir se um ponto crítico é um ponto de máximo ou de mínimo é fazendo um estudo de sinal em f'. Geralmente trabalharemos com funções polinomiais e isto não será um trabalho complicado.

Definição 6.5. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável. Dizemos que $c \in I$ é um *ponto de inflexão* de f se a segunda derivada de f muda de sinal em c. Em particular, devemos ter $f''(c) = 0$.

Retomando o exemplo $f(x) = x^4$, note que $x = 0$ não é ponto de inflexão, pois $f''(x)$ nunca muda de sinal. Já no exemplo de $f(x) = x^3$, temos que 0 é ponto de inflexão, pois $f''(x) = 6x > 0$ se $x > 0$ e $f''(x) = 6x < 0$ se $x < 0$.

Exemplo 6.6. ($n - 1$ EV) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável com exatamente um ponto de inflexão. Sejam $x_1, x_2, \cdots, x_n$ números reais tais que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = S$, para algum S fixado. Então, se

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$$

atinge um ponto de máximo ou mínimo, então o máximo ou mínimo ocorre quando $n - 1$ dos $x_i's$ são iguais.

Demonstração: Seja k o ponto de inflexão, e suponha $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_m \geq k \geq x_{m+1} \geq \cdots \geq x_n$.

Suponha que f é convexa para (k, ∞) e côncava para $(-\infty, k)$ (o outro caso é análogo). Por Karamata temos que

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_m) \leq (m-1)f(k) + f(x_1 + x_2 + \cdots + x_m - (m-1)k).$$

Por outro lado, novamente por Karamata, temos que

$$(m-1)f(k) + f(x_{m+1}) + \cdots + f(x_n) \leq (n-1)f\left(\frac{(m-1)k + x_{m+1} + \cdots + x_n}{n-1}\right).$$

Somando as duas, ficamos com

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leq (n-1)f\left(\frac{(m-1)k + x_{m+1} + \cdots + x_n}{n-1}\right) + f(x_1 + x_2 + \cdots + x_m - (m-1)k).$$

Portanto, o máximo ocorre de fato quando $n - 1$ das variáveis são iguais. Se todos os $x_i's$ estão do mesmo lado de k, podemos aplicar Karamata diretamente e prosseguir como nos casos acima. □

Usaremos agora o exemplo acima para fazer uma outra solução para o problema 2 da IMO 2001.

Exemplo 6.7. (IMO 2001) Sejam a, b, c reais positivos. Prove que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

Solução: Sejam $\frac{bc}{a^2} = e^x$, $\frac{ca}{b^2} = e^y$ e $\frac{ab}{c^2} = e^z$. Ficamos então com $x + y + z = 0$ e, sendo $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+8e^x}}$, queremos mostrar que

$$f(x) + f(y) + f(z) \geq 1.$$

Temos que $f''(x) = \frac{4e^x(4e^x-1)}{(8x^2+1)^{5/2}}$. Portanto, vemos que $f''(x) > 0$ se $x > -\ln(4)$ e $f''(x) < 0$ se $x < -\ln(4)$, de modo que $x = -\ln(4)$ é o único ponto de inflexão.

Dessa forma, pelo **Exemplo 6.6**, basta analisarmos o caso em que duas das variáveis são iguais. Suponha, sem perda de generalidade, que $x = y \Rightarrow z = -x - y$. Então, sendo $t = e^x$ queremos provar que

$$\frac{2}{\sqrt{1+8t}} + \frac{1}{\sqrt{1+8/t^2}} \geq 1.$$

A desigualdade equivale a

$$\frac{\sqrt{1+8/t^2}-1}{\sqrt{1+8/t^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+8t}} \iff \frac{(\sqrt{1+8/t^2}-1)^2}{1+8/t^2} \leq \frac{4}{1+8t} \iff \frac{8t^3+32t-t^2-12}{t^2(1+8t)} \leq \sqrt{1+\frac{8}{t^2}}$$

Vejamos quando $8t^3 - t^2 + 32t - 12 < 0$. Seja $h(t) = 8t^3 - t^2 + 32t - 12$. Temos $h'(t) = 24t^2 + 32 - 2t > 0$ para todo t, já que $\Delta < 0$. Logo, $h(t)$ é crescente. Seja r a única raiz real de $h(t)$. É fácil ver que $r > 0$, pois todas as parcelas de $h(r)$ são negativas se $r < 0$ e claramente $r \neq 0$. Portanto, para $t < r$ temos $h(t) < 0$ e a desigualdade é sempre verdade. Para $t \geq r > 0$, devemos ter

$$\begin{aligned}
\frac{8t^3+32t-t^2-12}{t^2(1+8t)} \leq \sqrt{1+8/t^2} &\iff (8t^3+32t-t^2-12)^2 \leq t^2(1+8t)^2(t^2+8) \\
&\iff 2t^5 + 24t^3 - 65t^2 + 48t - 9 \geq 0 \\
&\iff (t-1)^2(2t^3+4t^2+30t-9) \geq 0 \\
&\iff 2t^3 + 4t^2 + 30t - 9 \geq 0.
\end{aligned}$$

Sendo $g(t) = 2t^3 + 4t^2 + 30t - 9$, temos que $g'(t) = 6t^2 + 8t + 30 > 0$, já que $\Delta < 0$. Logo, $g(t)$ também é crescente. Dessa forma, basta verificar que $g(r) \geq 0$.

Temos que $h(r) = 0 \Rightarrow 8r^3 = r^2 - 32r + 12$. Então, temos que

$$g(r) \geq 0 \iff 2r^3 + 4r^2 + 30r - 9 \geq 0 \iff 17r^2 + 88r - 24 \geq 0 \iff r \geq \frac{-44+2\sqrt{586}}{17}.$$

Pegamos a raiz positiva pois $r > 0$. Veja que $\frac{-44+2\sqrt{586}}{17} < \frac{50-44}{17} = \frac{6}{17}$. Finalmente, temos que

$$h\left(\frac{6}{17}\right) = 8\left(\frac{6}{17}\right)^3 - \left(\frac{6}{17}\right)^2 + 32\left(\frac{6}{17}\right) - 12 < 0 = h(r) \Rightarrow r > \frac{6}{17},$$

pois h é crescente, e concluímos o desejado. □

Terminamos esta seção com um último resultado importante envolvendo derivadas:

Teorema 6.8. (Rolle) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com $f(a) = f(b)$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

O teorema de Rolle pode ser bastante útil, principalmente no contexto de polinômios. De fato, se $P(x)$ tem n raízes reais, por Rolle, P' tem $n - 1$ raízes reais e assim por diante. Em particular, a derivada de ordem $n - 2$ é um polinômio de grau 2 com duas raízes reais. Então podemos dizer que $\Delta \geq 0$. Isso pode parecer feio, mas muitas vezes fornece desigualdades interessantes entre os coeficientes de P. Lembrar dos polinômios simétricos pode ajudar nessas situações.

7 Multiplicadores de Lagrange

Teorema 7.1. Seja $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ uma função contínua e diferenciável em $K \subset \mathbb{R}^n$ e sejam $g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$, $i = 0, 1, \cdots, k$ $(k < m)$ condições que devem ser satisfeitas. Então se f atinge um extremo local em K sobre as condições $g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$, $i = 0, 1, \cdots, k$ num ponto p, então p pertence ao bordo de K ou p anula todas as derivadas parciais de

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Note que para utilizar o resultado é necessário saber que f possui algum extremo local em K. Nem sempre conseguimos garantir isso, mas um caso interessante é quando K é um conjunto compacto! Pode-se provar que toda função contínua definida num compacto assume um máximo e um mínimo global. Além disso, todo extremo global é certamente um extremo local e então estamos nas condições do teorema. Veja [8] para mais detalhes.

Exemplo 7.2. (Canadá 1999) Sejam $x, y, z \geq 0$ tais que $x + y + z = 1$. Determine o maior valor possível da expressão $xy^2 + yz^2 + zx^2$.

Solução: Sejam $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$ e $g(x, y, z) = x + y + z - 1$. Defina

$$L(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2 - \lambda(x + y + z - 1).$$

Pode-se verificar $K = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1,\ x, y, z \in [0, 1]\}$ é compacto. Logo, f definida sobre K atinge um máximo e um mínimo. Portanto, pelo **teorema 7.1**, os pontos de máximo ou mínimo de f estão na borda (uma das coordenadas igual a 0) ou são soluções do sistema abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 2zx - \lambda = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = z^2 + 2xy - \lambda = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = x^2 + 2yz - \lambda = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Logo, $y^2 + 2zx = z^2 + 2xy = x^2 + 2yz$ e então

$$x^2 + 2yz = y^2 + 2zx \iff (x - y)(x + y - 2z) = 0.$$

Analogamente, temos $(z - x)(z + x - 2y) = 0$. Logo, temos 4 casos:

- $x = y = z$: como $x + y + z = 1$, temos $x = y = z = \frac{1}{3}$ e obtemos $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{9}$;
- $x = y$ e $z + x - 2y = 0$: como $z + x = 1 - y$, temos $y = \frac{1}{3}$ e então $x = y = z = \frac{1}{3}$ e obtemos $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{9}$;
- $z = x$ e $z + x - 2y = 0$: análogo ao anterior;
- $x + y - 2z = 0$ e $z + x - 2y = 0$: como $x + y = 1 - z$ e $z + x = 1 - y$, obtemos $x = y = z = \frac{1}{3} \Rightarrow f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{9}$.

Se uma das coordenadas é 0, sem perda de generalidade $z = 0$, temos que $x + y = 1$ e queremos o máximo de xy^2. Por $MA - MG$, temos que

$$\frac{x + \frac{y}{2} + \frac{y}{2}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{xy^2}{4}} \Rightarrow xy^2 \leq \frac{4}{27},$$

com igualdade se, e somente se, $x = \frac{1}{3}$ e $y = \frac{2}{3}$. Como $\frac{4}{27} > \frac{1}{9}$, segue que o valor máximo é $\frac{4}{27}$ (e o mínimo é $\frac{1}{9}$).

8 Problemas

1. (APMOC 2014) Sejam a, b, c reais positivos. Prove que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} < 2.$$

2. (IMO SL 2009) Sejam a, b, c reais positivos tais que $a+b+c = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Prove que

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(a+2b+c)^2} + \frac{1}{(a+b+2c)^2} \leq \frac{3}{16}$$

3. (OBMU 2018) Dado n um inteiro positivo, determine o valor máximo de

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3$$

para x_j, com $1 \leq j \leq n$, números reais satisfazendo $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ e $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.

4. (APMO 1996) Se a, b, c são os lados de um triângulo, mostre que

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

5. (Vietnam 1998) Sejam $x_1, x_2, \cdots, x_n$ reais positivos tais que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1998+x_i} = \frac{1}{1998}$. Prove que

$$\frac{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}{n-1} \geq 1998.$$

6. (MOP 2012) Se $a+b+c+d = 4$, mostre que

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

7. (IMO 2020) Sejam a, b, c, d reais tais que $a \geq b \geq c \geq d > 0$ e $a+b+c+d = 1$. Prove que

$$(a+2b+3c+4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

8. (IMO 2021) Mostre que a desigualdade

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i + x_j|}$$

é verdadeira para todos os reais $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

9. (IMO SL 1998) Sejam $r_1, r_2, \cdots, r_n$ reais maiores que 1. Prove que

$$\frac{1}{r_1+1} + \frac{1}{r_2+1} + \cdots + \frac{1}{r_n+1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}.$$

10. (IMO 1999) Seja $n \geq 2$ um inteiro fixado. Determine a menor constante C tal que a desigualdade

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} x_ix_j\left(x_i^2 + x_j^2\right) \leq C\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4$$

é verdadeira para quaisquer $x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$. Para este C, caracterize os casos de igualdade.

11. (USAMO 2017) Determine o menor valor possível de

$$\frac{a}{b^3+4} + \frac{b}{c^3+4} + \frac{c}{d^3+4} + \frac{d}{a^3+4}$$

dado que a, b, c, d são reais não negativos tais que $a+b+c+d = 4$.

12. (SL IMO 2004) Sejam a, b, c reais positivos tais que $ab+bc+ca = 1$. Prove que

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a} \leq \frac{1}{abc}.$$

13. (USAMO 1978) Sejam a, b, c, d, e números reais tais que $a+b+c+d+e = 8$ e $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 = 16$. Qual é o maior valor possível de e?

14. (USAMO 1998) Sejam $a_0, a_1, \cdots, a_n$ números no intervalo $(0, \pi/2)$ tais que

$$\tan(a_0 - \frac{\pi}{4}) + \tan(a_1 - \frac{\pi}{4}) + \cdots + \tan(a_n - \frac{\pi}{4}) \geq n-1.$$

Prove que

$$\tan a_0 \tan a_1 \cdots \tan a_n \geq n^{n+1}.$$

15. (Romênia 1999) Mostre que para quaisquer reais positivos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ com $x_1x_2 \cdot sx_n = 1$ temos

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \cdots + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1.$$

16. (USAMO 2001) Sejam a, b, c reais não negativos tais que $a^2+b^2+c^2+abc = 4$. Prove que

$$0 \leq ab+bc+ca-abc \leq 2.$$

17. (USAMO 2003) Sejam a, b, c reais positivos. Prove que

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8.$$

18. (Coréia 1998) Sejam a, b, c reais positivos tais que $a+b+c=abc$. Prove que

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+1}}\le\frac{3}{2}$$

e determine quando a igualdade ocorre.

19. (IMO SL 2007) Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ reais não negativos tais que $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{100}^2=1$. Prove que

$$a_1^2\cdot a_2+a_2^2\cdot a_3+\ldots+a_{100}^2\cdot a_1<\frac{12}{25}.$$

20. (ELMO 2013) Sejam a, b, c reais positivos satisfazendo $a+b+c=\sqrt[7]{a}+\sqrt[7]{b}+\sqrt[7]{c}$. Prove que $a^a b^b c^c\ge 1$.

21. (Irã TST 2009) Sejam a, b, c reais positivos tais que $a+b+c=3$. Prove que:

$$\frac{1}{2+a^2+b^2}+\frac{1}{2+b^2+c^2}+\frac{1}{2+c^2+a^2}\le\frac{3}{4}.$$

22. (Irã 2015) x, y, z Sejam x, y, z reais não nulos tais que $x+y+z=xyz$. Prove que

$$\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2+\left(\frac{y^2-1}{y}\right)^2+\left(\frac{z^2-1}{z}\right)^2\ge 4.$$

23. (OBM 2011) Sejam $x_1, x_2, x_3, \cdots x_{2011}$ reais não negativos cuja soma é $\frac{2011}{2}$. Prove que:

$$\left|\prod_{cic}(x_i-x_{i+1})\right|=|(x_1-x_2)(x_2-x_3)\cdots(x_{2011}-x_1)|\le\frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

24. Sejam a, b, c, d reais não negativos tais que $a+b+c+d=4$. Prove que

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2)+4abcd\ge 16.$$

25. (IMO LL 1977) Se $0\le a\le b\le c\le d$, prove que

$$a^b b^c c^d d^a\ge b^a c^b d^c a^d.$$

26. (Irã 2021) Sejam a, b, c e d reais positivos tais que $a+b+c+d=4$. Prove que

$$\frac{ab}{a^2-\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}}+\frac{bc}{b^2-\frac{4}{3}b+\frac{4}{3}}+\frac{cd}{c^2-\frac{4}{3}c+\frac{4}{3}}+\frac{da}{d^2-\frac{4}{3}d+\frac{4}{3}}\le 4.$$

27. (Coréia 2014) Sejam $x, y, z\in\mathbb{R}$ tais que $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=8$ e $x^3+y^3+z^3=1$. Determine o valor mínimo de $x^4+y^4+z^4$.

28. (IMC 2014) Sejam $n\ge 3$ e $x_1, x_2, ..., x_n$ reais não negativos. Defina $A=\sum_{i=1}^{n}x_i$, $B=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$, $C=\sum_{i=1}^{n}x_i^3$. Prove que

$$(n+1)A^2B+(n-2)B^2\ge A^4+(2n-2)AC.$$

29. (Putnam 2018) Determine o maior valor possível de

$$\sum_{i=1}^{10}\cos(3x_i)$$

para $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ satisfazendo $\sum_{i=1}^{10}\cos(x_i)=0$.

30. (China Girls 2011) Os reais positivos a, b, c, d satisfazem $abcd=1$. Prove que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{9}{a+b+c+d}\ge\frac{25}{4}.$$

9 Referências

[1] CVETKOVSKI, Zdravko. *Inequalities: Theorem, Techniques and Selected Problems.* Springer (2012).

[2] LIMA, Elon Lages. "Análise real vol. 1: Funções de uma Variável." Rio de Janeiro: IMPA (2010).

[3] *A Brief Introduction to Olympiad Inequalities*, Evan Chen, 2014.

[4] *Olympiad Inequalities*, Thomas J. Mildorf, 2005.

[5] *Desigualdades*, Carlos Shine, 2011.

[6] *Notes for MOP*, Kiran Kedlaya, 1999.

[7] *Inequalities*, Yufei Zhao, 2008.

[8] *Lagrange Murderpliers Done Correctly*, Evan Chen, 2014.