

# Descenso Infinito de Fermat

Andrey Chen

1. Mostre que a equação  $a^4 = 2b^4 + 4c^4 + 8d^4$  não admite solução inteira não-nula.
2. a) Mostre que não existe solução não-nula nos racionais para  $x^4 + y^4 = z^2$ .  
b) Mostre que não existe solução não-nula nos racionais para  $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ . (Dica: sendo  $x, y$  ímpares, faça  $x = u + v, y = u - v$ )
3. a) Mostre que não existem três racionais  $a, b, c$  tais que  $7 = a^2 + b^2 + c^2$ .  
b) Encontre o menor número de polinômios de coeficientes racionais tais que a soma de seus quadrados dá  $x^2 + 7$ .
4. Encontre todas as soluções inteiras positivas de  $a^2 - ab - b^2 = \pm 1$ .
5. Sejam  $a, b$  inteiros positivos tais que  $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$  é inteiro. Mostre que esse quociente é quadrado perfeito.
6. a) Encontre todos os valores possíveis de  $\frac{a^2+b^2+1}{ab}$ , com  $a, b$  inteiros positivos.  
b) Encontre todos os valores possíveis de  $\frac{a^2+ab+b^2}{ab-1}$  onde  $a, b$  são inteiros positivos com  $ab > 1$ .
7. Prove que existe um valor de  $m$  tal que a equação  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} = \frac{1}{a+b+c}$  admite infinitas soluções inteiras positivas.
8. Prove que, para cada  $m > 0$  inteiro, existem infinitos pares de inteiros positivos  $a, b$  com  $a|b^2 + m, b|a^2 + m$ .