semana Olímpica

OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática.
24^a Semana Olímpica - Teresina/PI.
07 a 13 de novembro de 2021.

Prof. Carlos Gomes - DMAT UFRN.
cgomesmat@gmail.com

Funções geradoras, funções que contam! - Nível 3.

1 Introdução

Em algumas áreas da Matemática, como por exemplo em Combinatória e Teoria dos Números é muito fácil de encontrarmos questões fáceis de enunciar, mas que são difíceis de responder. Neste pequeno texto apresentaremos uma importante ferramenta para atacar problemas de contagem: as funções geradoras.

Por exemplo, imagine que você irá produzir uma salada com exatamente 20 frutas contendo, necesssariamente, maçãs, bananas, laranjas e pêras supondo que:

- O número de maçãs deve ser par;
- O número de bananas deve ser um múltiplo de 5;
- Deve conter no máximo quatro laranjas;
- Deve contar no máximo três pêras.

Quantas saladas distintas você pode formar? Ou ainda, se 5 dados comuns e honestos são lançados simultaneamente, de quantas formas distintas a soma dos resultados obtidos pode ser igual a 18?

Apesar da clareza e da simplicidade dos enunciados das questões acima, as técnicas tradicionais de contagem não se mostram muito eficientes para responder tais questões. Ao longo deste capítulo vamos mostrar como as chamadas *funções geradoras* podem nos auxiliar a responder essas e muitas outras questões de contagem.

As chamadas *funções geradoras*, grosso modo, são objetos que transformam problemas de sequências em problemas de funções. Qual a vantagem disso? A vantagem está no fato de que podemos usar toda a álgebra disponível no âmbito das funções para manipular "as contas" e depois regressar ao problema original de uma maneira surpreendentemente eficiente. Além dos problemas de contagem, também podemos utilizar as funções geradoras para atacar problemas de obter certas somas, assim como problemas que utilizam recorrências.

2 Funções geradoras

Originalmente, as funções geradoras foram introduzidas nos trabalhos de Abrahan De Moivre (1718). As funções geradoras também foram utilizadas por Leonard Euler (1746) no estudo da partição de números inteiros positivos como soma de outros inteiros positivos. Nicolau Bernoulli (1730) utilizou este método no estudo das permutações caóticas. O desenvolvimento dessa teoria deve-se principalmente aos trabalhos do matemático francês Pierre Simon de Laplace (1812) sobre o cálculo das probabilidades, num livro onde ele desenvolveu o estudo das funções geradoras, especialmente as funções geradoras de momento. Em virtude desse trabalho Laplace é considerado o pai da teoria das funções geradoras. Por volta de 1915, P. MacMahon usou extensivamente as funções geradoras no seu tratado sobre Análise Combinatória. Os fundamentos do chamado "Cálculo Simbólico" foram estabelecidos nos trabalhos de E. B. Bell (1940) e num famoso livro de J. Riordan (1958). Mais recentemente (1978), R. P. Stanley, publicou um artigo dando um excelente panorama do desenvolvimento das funções geradoras. A seguir vamos estudar as ideias básicas dessa bela e potente teoria.

Definição. 2.1 (Função geradora)**.** *Dada uma sequência numérica $(a_n)_{n\geq 0}$, definimos a função geradora (ordinária) dessa sequência como sendo a série de potências formal*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots$$

Paramos aqui para falar um pouco sobre a palavra "formal" que apareceu na definição acima. Essa palavra significa que não estamos interessados em questões de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, isto é, não estamos interessados nos valores de x para os quais essa série torna-se convergente. Ao contrário disso, estamos interessados apenas nessa série como um objeto algébrico.

Exemplo. 2.1. *A seguir mostramos algumas sequências numéricas e suas respectivas funções geradoras:*

$$(0,0,0,0,\dots) \mapsto f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \dots \equiv 0.$$
$$(1,1,1,1,\dots) \mapsto f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$
$$(1,1,\tfrac{1}{2!},\tfrac{1}{3!},\dots) \mapsto f(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \dots$$
$$(1,1,2,3,\dots) \mapsto f(x) = 1 + 1x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$$

note que se indexarmos a sequência a partir do 0 *o coeficiente de* x^k *na função geradora da sequência* $(a_n)_{n\geq 0}$ *é exatamente igual a* a_k.

Quando $|x| < 1$, sabemos que

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Apesar dessa igualdade não ser verdadeira quando $|x| \geq 1$, como estamos trabalhando com as séries de potências formais, isto é, não estamos levando em consideração os intervalos de convergência das séries de potências em questão, vamos "fechar os olhos" e considerar que a função garadora da sequência $(1,1,1,1,\dots)$ seja

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

De modo completamente análogo vamos considerar que:

$$(1,-1,1,-1,\dots) \mapsto f(x) = 1 - x + 1x^2 - 0x^3 + \dots = \tfrac{1}{1+x}.$$
$$(1,a,a^2,a^3,\dots) \mapsto f(x) = 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \dots = \tfrac{1}{1-ax}$$
$$(1,0,1,0,1\dots) \mapsto f(x) = 1 + x^2 + x^4 \dots = \tfrac{1}{1-x^2}$$

Exemplo. 2.2. *Encontre a a função geradora ordinária para a sequência*

$$(a_n)_{n\geq 0} = \left(\frac{2^n}{n!}\right)$$

Solução. Como

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Trocando-se x por $2x$ segue-se que:

$$\begin{aligned} e^{2x} = & \; 1 + 2x + \tfrac{(2x)^2}{2!} + \tfrac{(2x)^3}{3!} + \tfrac{(2x)^4}{4!} + \dots \tfrac{(2x)^n}{n!} + \dots \\ = & \; 1 + \left(\tfrac{2^1}{1!}\right)x + \left(\tfrac{2^2}{2!}\right)x^2 + \left(\tfrac{2^3}{3!}\right)x^3 + \dots + \left(\tfrac{2^n}{n!}\right)x^n + \cdots \end{aligned}$$

O que nos mostra que $f(x) = e^{2x}$ é a função geradora da referida sequência.

■

Exemplo. 2.3. *Dê exemplo de uma sequência* $(a_n)_{n\geq 0}$ *cuja função geradora seja dada por* $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Solução. Sabemos que:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Na igualdade acima substituindo x por x^2, obtemos:

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots$$

Portanto $f(x)$ é a função geradora da sequência

$$(a_n)_{n\geq 0} = (1,0,1,0\dots)$$

■

2.1 Operações com funções geradoras

As funções geradoras podem ser multiplicadas por constantes, adcionadas, subtraídas e multiplicadas como mostraremos logo a seguir. Consideremos as sequências numéricas $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(b_n)_{n\geq 0}$ cujas funções geradoras são, respectivamente:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$g(x) = b_0 + a_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$$

e uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$. Nessas condições, definimos as sequintes operações formais.

- **Multiplicação por escalar.**

  $$\lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot a_0 + \lambda \cdot a_1x^1 + \lambda \cdot a_2x^2 + \lambda \cdot a_3x^3 + \dots$$

  Em particular, se $\lambda = -1$, temos que $(-1)\cdot f(x) = -f(x)$. Assim,

  $$-f(x) = -a_0 - a_1x^1 - a_2x^2 - a_3x^3 + \dots$$

- **Adição.**

  $$f(x)+g(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+(a_3+b_3)x^3+\dots$$

- **Subtração.**

  $$\begin{aligned} f(x) - g(x) =& f(x) + (-g(x)) \\ =& (a_0 + (-b_0)) + (a_1 + (-b_1))x + \dots \\ =& (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \dots \end{aligned}$$

- **Multiplicação.**

  $$\begin{aligned} f(x)\cdot g(x) =& (a_0 + a_1x + \dots)(b_0 + b_1x + \dots) \\ =& c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots \end{aligned}$$

  onde $c_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_ib_{n-i} = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0.$

- **Deslocamento para a direita.**

  Para motivar as ideias vamos determinar a função geradora da sequência $(\overbrace{0,0,\dots,0}^{k \text{ termos}},1,1,\dots)$ a partir da função geradora da sequência $(1,1,1,\dots,)$ que, como sabemos é $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Por definição, função geradora da sequência $(\overbrace{0,0,\ldots,0}^{k\text{ termos}},1,1,\ldots)$ é

$$\begin{aligned}g(x) =& \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\\ =& 0+0x+0x^2+\ldots+0x^{k-1}+1x^k+1x^{k+1}+\ldots\\ =& x^k+x^{k+1}+x^{k+2}+\ldots\\ =& x^k(1+x+x^2+\ldots)\\ =& x^k\frac{1}{1-x}=\frac{x^k}{1-x}.\end{aligned}$$

De um modo mais geral, se $f(x)$ é a função geradora da sequência

$$(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots),$$

então a função geradora da sequência $(\overbrace{0,0,\ldots,0}^{k\text{ termos}},a_0,\ldots)$ é dada por $g(x)=x^kf(x)$. De fato, por definição, a função geradora da sequência $(\overbrace{0,0,\ldots,0}^{k\text{ termos}},a_0,a_1,a_2\ldots)$ é

$$\begin{aligned}g(x) =& \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\\ =& 0+0x+0x^2+\ldots+0x^{k-1}+a_0x^k+\ldots\\ =& a_0x^k+a_1x^{k+1}+a_2x^{k+2}+\ldots\\ =& x^k(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)\\ =& x^kf(x).\end{aligned}$$

Teorema. 1. *Sendo $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente, as funções geradoras das sequências $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(b_n)_{n\geq 0}$ temos:*

(i) $\alpha f(x)+\beta g(x)$ é a função geradora da sequência $(\alpha a_n+\beta b_n)_{n\geq 0}$, com $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$;

(ii) A função geradora para $(a_0+a_1+\ldots+a_n)_{n\geq 0}$ é $\left(1+x+x^2+\ldots\right)f(x)$;

(iii) A função geradora para $(na_n)_{n\geq 0}$ é $xf'(x)$;

(iv) A função gerdora da sequência $\left(\frac{a_n}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ é dada por $\dfrac{\int f(x)dx}{x}$.

3 Funções geradoras; funções que contam!

Nesta seção vamos mostrar como as funções geradoras podem ser usadas para resolver problemas de contagem. Para motivar as primeiras ideias nessa direção, vamos discutir o seguinte exemplo.

Exemplo. 3.1. *Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $x_1+x_2+x_3=9$, onde $x_1\in\{2,3\}$, $x_2\in\{1,4\}$ e $x_3\in\{3,4,5\}$?*

Solução. Definamos três polinômios, um para cada variável x_i, com $1\leq i\leq 3$ da seguinte forma:

$$x_1\in\{2,3\}\Rightarrow p_1(x)=x^2+x^3$$

$$x_2\in\{1,4\}\Rightarrow p_2(x)=x+x^4$$

$$x_3\in\{3,4,5\}\Rightarrow p_3(x)=x^3+x^4+x^5$$

Agora defina o polinômio $p(x)=p_1(x)p_2(x)p_3(x)$ que é:

$$\begin{aligned}p(x) &= p_1(x)p_2(x)p_3(x)\\ &= \left(x^2+x^3\right)\left(x+x^4\right)\left(x^3+x^4+x^5\right)\\ &= x^{12}+2x^{11}+2x^{10}+2x^9+2x^8+2x^7+x^6.\end{aligned}$$

Para obtermos o número soluções inteiras e não negativas que possui a equação $x_1+x_2+x_3=9$, onde $x_1\in\{2,3\}$, $x_2\in\{1,4\}$ e $x_3\in\{3,4,5\}$, basta observarmos o coeficiente de x^9 no polinômio p, ou seja 2. Mas por que isso funciona? Note que:

$$x^9=x^2x^4x^3 \ \text{ e } \ x^9=x^3x^1x^5;$$

além disso, os ternos $(2,4,3)$ e $(3,1,5)$ são soluções inteiras e não negativas da equação $x_1+x_2+x_3=9$, onde $x_1\in\{2,3\}$, $x_2\in\{1,4\}$ e $x_3\in\{3,4,5\}$.

Assim, o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1+x_2+x_3=9$, onde $x_1\in\{2,3\}$, $x_2\in\{1,4\}$ e $x_3\in\{3,4,5\}$ corresponde ao número de maneiras de obtermos x^9 quando multiplicamos três fatores, a saber:

- um do polinômio $p_1(x)=x^2+x^3$;
- outro do polinômio $p_2(x)=x+x^4$;
- e outro do polinômio $p_3(x)=x^3+x^4+x^5$.

Portanto o número de maneiras distintas de obter x^9 efetuando-se o produto

$$\begin{aligned}p(x) =& p_1(x)p_2(x)p_3(x)\\ =& \left(x^2+x^3\right)\left(x+x^4\right)\left(x^3+x^4+x^5\right)\end{aligned}$$

corresponde a quantidade de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1+x_2+x_3=9$, onde $x_1\in\{2,3\}$, $x_2\in\{1,4\}$ e $x_3\in\{3,4,5\}$.

■

No exemplo anterior, dizemos que o polinômio

$$p(x)=p_1(x)p_2(x)p_3(x)$$

é a *função geradora associada ao problema*, visto que gera as respostas para o seguinte problema combinatório: Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $x_1+x_2+x_3=m$, onde $x_1\in\{2,3\}$, $x_2\in\{1,4\}$ e $x_3\in\{3,4,5\}$ e $m\in\{6,7,8,9,10,11,12\}$?

Como

$$\begin{aligned}
p(x) =& p_1(x)p_2(x)p_3(x)\\
=& \left(x^2+x^3\right)\left(x+x^4\right)\left(x^3+x^4+x^5\right)\\
=& x^{12}+2x^{11}+2x^{10}+2x^9+2x^8+2x^7+x^6
\end{aligned}$$

a resposta será o coeficiente de p no termo x^m.

Exemplo. 3.2. *Uma moeda é arremessada* 20 *vezes, aparecendo cara em* 13 *vezes e coroa nas outras* 7 *vezes. Qual a probabilidade de que não tenham ocorrido* 5 *caras consecutivas?*

Solução. Existem $\binom{20}{7} = 77.520$ modos distintos de terem ocorrido 7 coroas nos 20 lançamentos. Agora vamos determinar em quantas dessas configurações não existem 5 caras consecutivas. Para isso, seja x_1 o número de caras antes da primeira coroa, x_2 o número de caras depois da primeira e antes da segunda coroa,..., x_7 o número de caras depois da sexta e antes da sétima coroa e x_8 o número de caras após a sétima coroa. Ora, como o número total de caras é 13, segue que

$$x_1+x_2+\ldots+x_8 = 13,\ 0 \le x_i \le 4$$

Para determinarmos o número de soluções inteiras da equação acima, com as restrições impostas, consideremos a função geradora

$$\begin{aligned}
f(x) =& (1+x+x^2+x^3+x^4)^8\\
=& \left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^8 = (1-x^5)^8(1-x)^{-8}\\
=& \left(1-\binom{8}{1}x^5+\binom{8}{2}x^{10}+\ldots\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-8}{k}(-x)^k\\
=& \left(1-\binom{8}{1}x^5+\binom{8}{2}x^{10}+\ldots\right)\cdot\\
&\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k-(-8)-1}{k}(-1)^k(-1)^k x^k\\
=& \left(1-\binom{8}{1}x^5+\binom{8}{2}x^{10}+\ldots\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+7}{k}x^k.
\end{aligned}$$

O número procurado corresponde ao coeficiente de x^{13} na expansão de $f(x)$, que é igual a

$$\binom{13+7}{7}-\binom{8}{1}\binom{8+7}{7}+\binom{8}{2}\binom{3+7}{7} = 29.400.$$

Diante do exposto a probabilidade de que não tenham ocorrido 5 caras consecutivas é $\mathbb{P} = \frac{29.400}{77.520} = 0,38$.

■

Exemplo. 3.3 (OBM)**.** *Quantas soluções inteiras e não negativas possui a equação $25x+10y+5z+w = 37$?*

Solução. Inicialmente façamos as seguintes mudanças de variáveis:

$$x_1 = 25x\ ,\ y_1 = 10y\ ,\ z_1 = 5z$$

Como $x, y, z \in \mathbb{Z}_+$ e $0 \le x \le 37$, $0 \le y \le 37$ e $0 \le z \le 37$, segue-se que: $x_1 \in \{0, 25\}$, $y_1 \in \{0, 10, 20, 30\}$, $z_1 \in \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35\}$ e $w \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 37\}$.

Construindo um polinômio para cada uma das quatro variáveis, tem-se:

$$\begin{aligned}
x_1 &\mapsto p_1(x) = 1+x^{25}\\
y_1 &\mapsto p_2(x) = 1+x^{10}+x^{20}+x^{30}\\
z_1 &\mapsto p_3(x) = 1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20}+x^{25}+x^{30}+x^{35}\\
w &\mapsto p_4(x) = 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{37}.
\end{aligned}$$

A função geradora para esse problema combinatório é o polinômio

$$\begin{aligned}
p(x) =& \quad p_1(x)\cdot p_2(x)\cdot p_3(x)\cdot p_4(x)\\
=& \quad \left(1+x^{25}\right)\left(1+\cdots+x^{30}\right)\cdots\left(1+x+\cdots+x^{37}\right)
\end{aligned}$$

Expandindo $p(x)$, obtemos:

$p(x) = x^{127}+x^{126}+x^{125}+x^{124}+x^{123}+2x^{122}+2x^{121}+2x^{120}+2x^{119}+2x^{118}+4x^{117}+4x^{116}+4x^{115}+4x^{114}+4x^{113}+6x^{112}+6x^{111}+6x^{110}+6x^{109}+6x^{108}+9x^{107}+9x^{106}+9x^{105}+9x^{104}+9x^{103}+13x^{102}+13x^{101}+13x^{100}+13x^{99}+13x^{98}+18x^{97}+18x^{96}+18x^{95}+18x^{94}+18x^{93}+24x^{92}+24x^{91}+24x^{90}+23x^{89}+23x^{88}+28x^{87}+28x^{86}+28x^{85}+27x^{84}+27x^{83}+33x^{82}+33x^{81}+33x^{80}+31x^{79}+31x^{78}+36x^{77}+36x^{76}+36x^{75}+34x^{74}+34x^{73}+40x^{72}+40x^{71}+40x^{70}+37x^{69}+37x^{68}+42x^{67}+42x^{66}+42x^{65}+38x^{64}+38x^{63}+42x^{62}+42x^{61}+42x^{60}+37x^{59}+37x^{58}+40x^{57}+40x^{56}+40x^{55}+34x^{54}+34x^{53}+36x^{52}+36x^{51}+36x^{50}+31x^{49}+31x^{48}+33x^{47}+33x^{46}+33x^{45}+27x^{44}+27x^{43}+28x^{42}+28x^{41}+28x^{40}+23x^{39}+23x^{38}+\mathbf{24x^{37}}+24x^{36}+24x^{35}+18x^{34}+18x^{33}+18x^{32}+18x^{31}+18x^{30}+13x^{29}+13x^{28}+13x^{27}+13x^{26}+13x^{25}+9x^{24}+9x^{23}+9x^{22}+9x^{21}+9x^{20}+6x^{19}+6x^{18}+6x^{17}+6x^{16}+6x^{15}+4x^{14}+4x^{13}+4x^{12}+4x^{11}+4x^{10}+2x^9+2x^8+2x^7+2x^6+2x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

O coeficitente de x^{37} é 24, o que revela que a equação $25x+10y+5z+w = 37$ possui 24 soluções inteiras e não negativas.

Agora responderemos uma das questões que propusemos no início deste capítulo.

Exemplo. 3.4. *Quantas saladas distintas podem ser formadas com exatamente* 20 *frutas contendo, necesssariamente, maçãs, bananas, laranjas e pêras com as seguintes restrições:*

- O número de maçãs deve ser par;
- O número de bananas deve ser um múltiplo de 5;
- Deve conter no máximo quatro laranjas;
- Deve contar no máximo três pêras.

Solução. Sejam m, b, l e p os números de maçãs, bananas, laranjas e peras, respectivamente. Ora, como as saladas que queremos formar deve ter obrigatoriamente 20 frutas, segue que

$$m+b+l+p = 20,$$

onde m é par, b é múltiplo de 5, $l \in \{1,2,3,4\}$ e $p \in \{1,2,3\}$. Para cada uma das variáveis podemos associar uma expressão algébrica, a saber:

$$\begin{aligned} m &\mapsto p_1(x) = x^2 + x^4 + \ldots + x^{20} \\ b &\mapsto p_2(x) = x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} \\ l &\mapsto p_3(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 \\ p &\mapsto p_4(x) = x + x^2 + x^3 \end{aligned}$$

Nesse caso, a função geradora associada às condições impostas pelo enunciado é dada por

$$\begin{aligned} f(x) =& p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot p_3(x) \cdot p_4(x) \\ =& (x^2 + x^4 + \ldots + x^{20}) \cdot (x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20}) \cdot \\ & \cdot (x + x^2 + x^3 + x^4) \cdot (x + x^2 + x^3) \end{aligned}$$

Expandindo a expressão acima com o software Maxima, segue que

$f(x) = x^{47} + 2x^{46} + 4x^{45} + 5x^{44} + 6x^{43} + 7x^{42} + 8x^{41} + 10x^{40} + 11x^{39} + 12x^{38} + 13x^{37} + 14x^{36} + 16x^{35} + 17x^{34} + 18x^{33} + 19x^{32} + 20x^{31} + 22x^{30} + 23x^{29} + 24x^{28} + 23x^{27} + 22x^{26} + 20x^{25} + 19x^{24} + 18x^{23} + 17x^{22} + 16x^{21} + 14x^{20} + 13x^{19} + 12x^{18} + 11x^{17} + 10x^{16} + 8x^{15} + \mathbf{7x^{14}} + 6x^{13} + 5x^{12} + 4x^{11} + 2x^{10} + x^9$

em que identificamos o coeficiente de x^{20} como sendo 14, o que revela que existem 14 saladas de frutas cumprindo as condições impostas pelo enunciado.

■

Exemplo. 3.5. *Se 5 dados comuns e honestos são lançados simultaneamente, de quantas formas distintas a soma dos resultados obtidos pode ser igual a 18?*

Solução. Sejam x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 os resultados obtidos em cada um dos 5 dados. Como queremos que a soma dos cinco resultados obtidos seja 18, devemos ter:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 18.$$

Lembrando que num dado comum os resultados possíveis são $1,2,3,4,5$ ou 6, segue que $1 \leq x_i \leq 6$ para $i = 1,2,3,4,5$. Assim, usando o método das funções geradoras segue que

$$f(x) = \left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)^5.$$

Ou seja, $f(x) = x^{30} + 5x^{29} + 15x^{28} + 35x^{27} + 70x^{26} + 126x^{25} + 205x^{24} + 305x^{23} + 420x^{22} + 540x^{21} + 651x^{20} + 735x^{19} + \mathbf{780x^{18}} + 780x^{17} + 735x^{16} + 651x^{15} + 540x^{14} + 420x^{13} + 305x^{12} + 205x^{11} + 126x^{10} + 70x^9 + 35x^8 + 15x^7 + 5x^6 + x^5$.

Como o coeficiente de x^{18} é 780, segue que existem 780 maneiras distintas para que a soma dos resultados obtidos nos 5 dados seja igual a 18.

■

Exemplo. 3.6. *Suponha que 20 balas iguais irão ser distribuídas para duas crianças, Antônio e Beatriz. Supondo que Antônio quer receber uma quantidade de balas que é um múltiplo de 3 e que a quantidade de balas que Beatriz quer receber seja um número primo, de quantas formas distintas podemos fazer essa distrubuição de modo que pelo menos uma dessas retrições seja satisfeita?*

Solução. Sejam A e B os conjuntos de todas as meneiras de fazer a distribuição das 20 balas de modo que o desejo de Antônio e Beatriz sejam atendidos, respectivamente. Nesse contexto o que queremos determinar é $|A \cup B|$. Ora, como

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

precisamos determinar os valores de $|A|, |B|$ e $|A \cap B|$. Como o número de balas que Antônio quer receber é um múltiplo de 3, a função geradora associada a essa distribuição é

$$f_A(x) = 1 + x^3 + x^6 + \ldots + x^{18}.$$

Como queremos que pelo menos uma das condições seja satisfeita, no caso de Antônio ser satisfeito, Beatriz poderá receber qualquer quantidade de balas, sem restrições. Nesse caso, a função geradora associada a Beatriz é

$$f_B(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{20},$$

o que faz com que a função geradora para satisfazer Antônio seja

$$\begin{aligned} f(x) =& f_A(x) \cdot f_B(x) \\ =& (1 + x^3 + x^6 + \ldots x^{18})(1 + x + x^2 + \ldots + x^{20}) \\ =& 1 + x + \ldots + 7x^{20} + \ldots + x^{38}. \end{aligned}$$

Como o coeficente de x^{20} em $f(x)$ é 7, segue que existem 7 maneiras de distribuir as 20 balas, satisfazendo o desejo de Antônio, ou seja $|A| = 7$.

De modo completamente análogo, a função geradora associada à distribuição satisfendo às condições de Beatriz é

$$\begin{aligned} g(x) =& f_A(x) f_B(x) \\ =& (1 + x + x + \ldots x^{20})(x^2 + x^3 + x^5 \ldots + x^{19}) \\ =& x^2 + \ldots + 8x^{20} + \ldots + x^{39}. \end{aligned}$$

Como o coeficente de x^{20} em $g(x)$ é 8, segue que existem 8 maneiras de distribuir as 20 balas satisfazendo o desejo de Beatriz, ou seja $|B| = 8$.

Por fim, para que as expectativas de Antônio e Beatriz sejam atendidas basta considerarmos a função geradora

$$\begin{aligned} h(x) =& f_A(x) \cdot f_B(x) \\ =& (1 + x^3 + x^6 + \ldots x^{18})(x^2 + \ldots + x^{19}) \\ =& x^2 \ldots + 4x^{20} + \ldots + x^{37}. \end{aligned}$$

Como o coeficente de x^{20} em $h(x)$ é 4, seque que existem 4 maneiras de distribuir as 20 balas, satisfazendo o desejo de Antônio e Beatriz, ou seja $|A \cap B| = 4$.

Diante do exposto,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 7 + 8 - 4 = 11.$$

■

Exemplo. 3.7. *Determine o número de soluções inteiras e não negativas do sistema*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 20 \end{cases}$$

Solução. Nesse caso vamos usar uma função geradora com duas variáveis x e y (uma para cada equação do sistema). O expoente da primeira variável x estará associado ao valor de cada x_i na primeira equação do sistema, enquanto que o expoente da variável y estará associado ao valor de cada x_i na segunda equação. De modo mais preciso, vamos associar à variável x_1 a função

$$f_1(x, y) = 1 + xy + x^2y^2 + \ldots,$$

visto que a variável x_1 apresenta o mesmo coeficiente 1 nas duas equações. Já a variável x_2 tem coeficiente 1 na primeira equação e coeficiente 2 na segunda equação, o que faz com que associemos a ela a função geradora $f_2(x, y) = 1 + xy^2 + x^2y^4 + \ldots$. De modo completamente análogo associamos às variáveis x_3 e x_4 as seguinte funções geradoras:

$$f_3(x, y) = 1 + xy^3 + x^2y^6 + \ldots \quad \text{e} \quad f_4(x, y) = 1 + xy^4 + x^2y^8 + \ldots,$$

respectivamente. Diante do exposto, a função geradora associada ao número de soluções inteiras e não negativas do sistema acima é:

$$\begin{aligned} f(x, y) =& f_1(x, y) \cdot f_2(x, y) \cdot f_3(x, y) \cdot f_4(x, y) \\ & (1 + xy + x^2y^2 + \ldots) \cdot (1 + xy^2 + x^2y^4 + \ldots) \cdot \\ & \cdot (1 + xy^3 + x^2y^6 + \ldots) \cdot (1 + xy^4 + x^2y^8 + \ldots) \\ =& \frac{1}{1 - xy} \cdot \frac{1}{1 - xy^2} \cdot \frac{1}{1 - xy^3} \cdot \frac{1}{1 - xy^4} \\ =& \frac{1}{(1 - y)(1 - xy^2)(1 - xy^3)(1 - xy^4)} \end{aligned}$$

Usando um programa de manipulação algébrica (Maxima), podemos obeservar que o coeficiente de $x^{10}y^{20}$ é 14, revelando que o sistema em questão possui 14 soluções inteiras e não negativas.

■

4 Função Geradora Exponencial

Nesta seção estudaremos de modo mais preciso a chamada *função geradora exponencial.* Antes de formalizar esse conceito, iniciaremos com um exemplo concreto que nos ajudará a introduzir algumas ideias.

Exemplo. 4.1. *Dispondo de três tipos diferentes de livros a, b e c, de quantos modos distintos podemos retirar quatro livros, colocando-os em ordem numa prateleira, sendo que o livro a pode ser escolhido no máximo uma vez, o livro b no máximo três vezes e o c no máximo duas vezes?*

Solução. Vamos associar à retidada dos livros do tipo a ao polinômio

$$p_1(x) = 1 + ax$$

à retirada do tipo b,

$$p_2(x) = 1 + bx + b^2x^2 + b^3x^3$$

e à retirada dos livros do tipo c ao polinômio

$$p_3(x) = 1 + cx + c^2x^2$$

Agora definamos o polinômio $p(x)$ por:

$$\begin{aligned} p(x) :=& \; p_1(x)p_2(x)p_3(x) \\ =& \; (1 + ax)\left(1 + bx + b^2x^2 + b^3x^3\right)\left(1 + cx + c^2x^2\right) \\ =& \; 1 + (a + b + c)\,x + \left(b^2 + ab + bc + ac + c^2\right)x^2 \\ +& \; \left(b^3 + ab^2 + ac^2 + b^2c + abc + bc^2\right)x^3 \\ +& \; \left(ab^3 + b^3c + ab^2c + b^2c^2 + abc^2\right)x^4 \\ +& \; \left(ab^3c + b^3c^2 + ab^2c^2\right)x^5 + ab^3c^2x^6. \end{aligned}$$

Observe que no polinômio $p(x)$, o coeficiente de x é

$$(a + b + c)$$

corresponde a lista de todas as possíveis escolhas de um só livro.

Já o coeficiente de x^2, $\left(b^2 + ab + bc + ac + c^2\right)$ corresponde a lista de todas as possibilidades de escolher dois livros e assim por diante. Assim, o coeficiente de x^4, ou seja,

$$\left(ab^3 + b^3c + ab^2c + b^2c^2 + abc^2\right)$$

corresponde a lista de todas as 5 possibilidades de escolhermos 4 livros.

Mas queremos um pouco mais! Queremos ordenar os 4 livros escolhidos numa prateleira. Assim, por exemplo, quando retiramos ab^3, isto é um livro do tipo a e três livros do tipo b, temos então $\frac{4!}{1!3!}$ maneiras distintas de ordená-los numa prateleira. Diante do exposto as possibilidades de arrumar as outras possíveis retiradas de 4 livros numa prateleira são:

$$\begin{aligned} b^3c &\longmapsto \tfrac{4!}{1!3!} \\ ab^2c &\longmapsto \tfrac{4!}{1!2!1!} \\ b^2c^2 &\longmapsto \tfrac{4!}{2!2!} \\ abc^2 &\longmapsto \tfrac{4!}{1!1!2!} \end{aligned}$$

Portanto, o número de maneiras de escolher 4 livros e arrumá-los numa prateleira é:

$$\left(\underbrace{\frac{4!}{1!3!}}_{ab^3} + \underbrace{\frac{4!}{1!3!}}_{b^3c} + \underbrace{\frac{4!}{1!2!1!}}_{ab^2c} + \underbrace{\frac{4!}{2!2!}}_{b^2c^2} + \underbrace{\frac{4!}{1!1!2!}}_{abc^2}\right)$$

■

Mas como poderíamos obter uma função geradora cujo coeficiente do x^4 fosse justamente esse?

Isso motiva a seguinte definição:

Definição. 4.1 (Função geradora exponencial). *A série (formal) de potências*

$$f(x)=a_0+a_1\frac{x}{1!}+a_2\frac{x^2}{2!}+\ldots+a_n\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

é a função geradora exponencial *da sequência* $(a_n)_{n\geq 0}$.

Esse nome "exponencial" vem do fato de que a função geradora exponencial da sequência $(1,1,1,\ldots)$ é igual a $f(x)=e^x$, visto que nos cursos de cálculo prova-se que

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots$$

No caso da função geradora (ordinária), sempre estaremos trabalhando com a função geradora da sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ com respeito à sequência $1,x,x^2,\ldots$, isto é,

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$$

Utilizamos a função geradora exponencial quando a ordem dos objetos retirados deve ser considerada. Quando a ordem dos objetos é irrelevante, utilizamos, como vimos nos vários exemplos anteriores, a função geradora ordinária.

Exemplo. 4.2. *Encontre o número de n-uplas formadas apenas pelos digitos $0,1,2$ e 3 que contém um número par de zeros.*

Solução. A função geradora exponencial para o dígito 0 é

$$f_0(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right).$$

Para cada um dos outros dígitos $1,2$ ou 3 a função geradora é:

$$f_1(x)=f_2(x)=f_3(x)=e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

A função geradora exponencial para este problema é

$$\begin{aligned}f(x)= &\ f_0(x)f_1(x)f_2(x)f_3(x)\\ = &\ \tfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)e^{3x}\\ = &\ \tfrac{1}{2}e^{4x}+\tfrac{1}{2}e^{2x}\\ = &\ \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4x)^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}\\ = &\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(4^n+2^n)\frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

Portanto, o número de n-úplas formadas apenas pelos digitos $0,1,2$ e 3 que contém um número par de zeros é igual ao coeficiente de $\frac{x^n}{n!}$ que vale

$$\frac{1}{2}\left(4^n+2^n\right).$$

■

Exemplo. 4.3. *De quantas formas distintas podemos acomodar 9 pessoas em 4 quartos diferentes sem que nenhum quarto fique vazio?*

Solução. Como são 4 quartos e 9 pessoas, para que nenhum quarto fique vazio nenhum quarto pode receber mais que 6 pessoas; de fato, se um quarto recebesse 7 pessoas, sobrariam apenas 2 pessoas para serem colocadas em 3 quartos, ficando dessa forma um quarto necessariamente vazio. Diante do exposto, a função geradora exponencial do problema é:

$$\begin{aligned}f(x)&=\left(x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^6}{6!}\right)\cdot\left(x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^6}{6!}\right)\cdot\\ &\quad\cdot\left(x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^6}{6!}\right)\cdot\\ &\quad\cdot\left(x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^6}{6!}\right)\\ &=\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}\right)^4.\end{aligned}$$

Assim, a resposta do nosso problema combinatório é o coeficiente de $\frac{x^9}{9!}$ na função geradora acima. Como

$$\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)^4=(e^x-1)^4$$

tem-se que:

$$f(x)=(e^x-1)^4=e^{4x}-4e^{3x}+6e^{2x}-4e^x+1$$

é a função geradora associado ao problema. Por fim, lembrando que vale a igualdade $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, segue que:

$$\begin{aligned}e^{4x}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4x)^k}{k!}=1+4x+\ldots+\frac{(4x)^9}{9!}+\ldots\\ -4e^{3x}&=-4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3x)^k}{k!}=-4.1-4.(3x)-\ldots-4.\frac{(3x)^9}{9!}+\ldots\\ 6e^{2x}&=6\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2x)^k}{k!}=6.1+6(2x)+\ldots+6\frac{(2x)^9}{9!}+\ldots\\ -4e^{x}&=-4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=-4.1-4.x-\ldots-4\frac{x^9}{9!}+\ldots\end{aligned}$$

Portanto, o coeficiente de $\frac{x^9}{9!}$ em $f(x)$ é obtido combinando-se os coeficientes de $\frac{x^9}{9!}$ em cada uma das séries acima, ou seja, o coefciente de $\frac{x^9}{9!}$ em $f(x)$ é $4^9-4.3^9+6.2^9-4=186480$.

■

5 Exercícios propostos

1. Considere uma faixa $n\times 3$ constituída de quadrados unitários. Seja a_n o número de maneiras distintas de cobrir essa faixa com peças de 1×1 e 3×3 formada por quadrados unitários. Determine explicitamente a função geradora $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

2. De quantas formas podemos selecionar 30 brinquedos a partir de 10 tipos de brinquedos diferentes se:

   (a) Pelo menos dois briquedos de cada tipo devem ser selecionados.

   (b) Pelo menos dois, mas não mais que cinco briquedos de cada tipo devem ser selecionados.

   Exemplo. 5.1. *Quantas sequências de* 3 *letras podemos formar com as letras* a, b *e* c*, onde a letra* a *ocorre no máximo uma vez, a letra* b *no máximo duas vezes e a letra* c *no máximo três vezes?*

3. Quantas n-úplas de 0's e 1's podem ser formadas usando-se um número par de 0's e um número par de 1's?

4. Suponha que 30 balas identicas serão distribuídas entre Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo. Sendo que Arnaldo deverá receber no mínimo 3 e no máximo 8 balas. Bernaldo, deverá receber no mínimo 5 e no máximo 10 balas. Cernaldo deverá receber no mínimo 6 e no máximo 15 balas. Dernaldo deverá receber um número par de balas e Ernaldo deverá receber exatamente uma bala a mais que Arnaldo. Determine o número de maneiras distintas para realizarmos a distribuição solicitada.

5. (a) Considere a função geradora $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Supondo que uma fórmula fechada para f seja

   $$f(x) = \frac{2+2x}{1-2x-x^2}$$

   Determine uma fórmula explícita para a_n, com $n \geq 0$ (inteiro).

   (b) A partir dessa função geradora, encontre uma lei de recorrência para a_n e condições iniciais para tal lei de recorrência.

6. Se $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$, é a função geradora da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então mostre que $f(x) = \frac{A(x)}{1-x}$ é a função geradora da sequência $(s_n)_{n\geq 0}$ dada por $s_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i$.

7. Construa a função geradora para a sequência $(a_n)_{n\geq 0}$, onde a_n é o número de maneiras distintas de selecionar n objetos a apartir de:

   (a) Quatro bolas brancas, seis amarelas e quatro bolas vermelhas (distinguiveis apenas pela cor).

   (b) Cinco bolas brancas, quatro bolas amarelas e dez bolas verdes (distinguiveis apenas pela cor), consirerando que devemos escolher pelo menos uma de cada cor.

   (c) Uma quantidade ilimitada de moedas de $0,01; 0,05; 0,10; 0,25; 0,50$ e $1,00$.

8. Determine a função geradora para o número de maneiras distintas de obter n centavos a partir de moedas de $0,01; 0,05$ e de $0,10$.

9. Determine a função geradora da sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ onde a_n representa o número de triângulos distintos com perímetro igual ao inteiro n.

10. De quantas formas podemos selecionar 30 brinquedos a partir de 10 tipos de brinquedos diferentes se:

    (a) Pelo menos dois briquedos de cada tipo devem ser selecionados.

    (b) Pelo menos dois, mas não mais que cinco briquedos de cada tipo devem ser selecionados.

    (c) Considere as soluções inteiros da equação $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = n$. Determine a função geradora para o números de soluções inteiras consistindo de

       i. Inteiros não negativos.
       ii. Inteiros positivos.
       iii. Inteiros x_i, onde $0 \leq x_i \leq i$.

    (d) Seja $p(n, k)$, o número de partições do inteiro positivo n em exatamente k parcelas.

       i. Mostre que $p(n, k)$ corresponde ao número de maneiras distintas de distribuírmos n objetos idênticos em k caixas idênticas.
       ii. Mostre que a função geradora associada com $p(n, k)$ é dada por:

       $$f(x, y) = \frac{1}{(1-xy)(1-x^2y)\cdots} = \prod_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-x^iy}\right)$$

Referências

[1] Gomes, Carlos A.; Diniz, Iesus C. ; Gurgel, Roberto T., Matemática Discreta - Conjuntos, Recorrências, Combinatória e Probabilidade. Livraria da Física da USP São Paulo, 2021 - 1^a edição.

[2] Tucker, Alan. Applied combinatorics. Wiley Sons , 3rd edition, 1995,

[3] Stanley, Richard. Catalan Numbers. Cambridge University Press, 2rd edition, 2015.

[4] Stanley, Richard. Enumerartive Combinatorics. Cambridge University Press, 1rd edition, 1986.

[5] Souza, Paulo Ney. Silva, Jorge Nuno. Berkley Problens in Mathematics, Springer Verlag, 1998.

[6] Feuillet, Christine; Selom, Isabelle. Algèbre-Geometrie 2° année - MP-MP*, Hachette Supérieur, 2004.

[7] www.obm.org.br

[8] www.imc-math.org.uk