Cálculo e Álgebra Linear em problemas de olimpíadas

Carlos Shine

Resumo

1 Cálculo

Você provavelmente já usa um pouco de Cálculo em problemas de olimpíada. Vamos usar um pouco mais.

1.1 Alguns fatos conhecidos

Concavidade, continuidade e limites

- f é contínua em a quando $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- f é convexa em um intervalo $[a,b]$ se o gráfico de $y = f(x)$ no intervalo $[c,d]$, $a \le c < d \le b$, está abaixo do segmento que liga $(c, f(c))$ a $(d, f(d))$. f é côncava se o gráfico sempre estiver acima do segmento.

Derivadas

- Definição: $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
- $f'(a)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.
- Propriedades operacionais: $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.
- Derivada implícita: podemos usar a regra da cadeia para achar a derivada $\frac{dy}{dx}$ sem ter que isolar o y.
- Regra da primeira derivada: se $f'(x) > 0$ no intervalo I, então f é crescente em I; se $f'(x) < 0$ no intervalo I, então f é decrescente em I.

Integrais

- Teorema fundamental do Cálculo: se $F'(x) = f(x)$ no intervalo (a,b) então $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.
- Substituições em integrais: fazer $u = g(x)$ pode simplificar integrais, ou seja, $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$. Em geral, calculamos $\frac{du}{dx}$, "passamos" dx para o outro lado (que é um abuso de linguagem aceitável) e torcemos para x sumir e ficarmos só com u.

- Estimativas: se $f(x) \le g(x)$ em (a,b) então $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.
- Integrais impróprias: se houver algum infinito envolvido, seja nos limites de integração como nos valores da função, é necessário verificar se a integral converge ou não. Por exemplo, $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ diverge mas $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge.

1.2 Alguns fatos não tão conhecidos

- Teorema do valor médio de Cauchy: sendo f, g deriváveis em (a,b), existe c nesse intervalo tal que

$$f'(c)(g(a)-g(b)) = g'(c)(f(a)-f(b)).$$

  Talvez seja mais fácil decorar na forma fracional

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)},$$

  embora seja necessário tomar cuidados com os denominadores.

- Derivação logarítmica: se houver muitas multiplicações então tirar o logaritmo e usar o fato de que $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ pode ajudar a fazer contas.
- Se $P(x) = a(x-r_1)^{m_1}(x-r_2)^{m_1}\dots(x-r_k)^{m_k}$ então

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{m_1}{x-r_1} + \frac{m_2}{x-r_2} + \cdots + \frac{m_k}{x-r_k}.$$

- Integração por partes: $\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$ (que é a regra do produto integrada).
- Polinômio de Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \cdots$$

  na vizinhança de x_0. Uma versão mais precisa é o teorema de Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-x_0)^k$$

  para algum c entre x_0 e x.

1.3 Algumas ideias clássicas

- Equação de Cauchy: se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todos x, y reais então $f(x) = ax$ para x *racional*. Para generalizar para reais, precisamos de alguma desigualdade (f crescente ou f contínua).
- Se α é irracional então $a_n = \{n\alpha\}$ é densa em $(0,1)$ (ou seja, para todo $r \in (0,1)$ existem infinitos termos a_n arbitrariamente próximos de r).
- Se uma sequência a_n é monotônica (ou seja, é sempre crescente ou sempre decrescente) e limitada (ou seja, existem reais m e M tais que $m \le a_n \le M$ para todo n) então admite limite no infinito.

1.4 Problemas

1. Sejam a, b, c, d reais tais que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Prove que
$$\sqrt{1-ab} + \sqrt{1-bc} + \sqrt{1-cd} + \sqrt{1-da} \geq 2\sqrt{3}.$$

2. Determine se existem dois polinômios não constantes $P(x)$ e $Q(x)$ com coeficientes reais tais que
$$(P(x))^{10} + (P(x))^9 = (Q(x))^{21} + (Q(x))^{20}.$$

3. Sejam P, Q polinômios não constantes com coeficientes reais primos entre si. Prove que existem no máximo três números reais λ tais que $P + \lambda Q$ é o quadrado de um polinômio.

4. Encontre todas as funções $f\colon (1,\infty) \to (1,\infty)$ tais que se $x, y > 1$ e $x^2 \leq y \leq x^3$ então $(f(x))^2 \leq f(y) \leq (f(x))^3$.

5. Encontre todas as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem a desigualdade
$$f(y) - \left(\frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z)\right) \leq f\left(\frac{x+z}{2}\right) - \frac{f(x)+f(z)}{2}$$
para todos os reais $x < y < z$.

6. Mostre que a desigualdade
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$
é satisfeita por todos os números reais $x_1, \ldots, x_n$.

7. Para cada inteiro positivo N, encontre o menor real b_N tal que, para todo real x,
$$\sqrt[N]{\frac{x^{2N}+1}{2}} \leq b_N(x-1)^2 + x.$$

8. Seja n inteiro maior do que 1 tal que n é a soma dos cubos de dois racionais. Prove que n também é a soma dos cubos de dois racionais *não negativos*.

2 Matrizes e álgebra linear

2.1 Alguns lembretes

- O *determinante* é uma função de matrizes quadradas de ordem n para conjuntos numéricos que satisfazem às seguintes propriedades:
  - $\det(I) = 1$;
  - É multilinear, ou seja, se uma coluna é uma combinação linear de dois vetores v e w, o determinante de A é a mesma combinação linear dos determinantes das matrizes com v e w no lugar da coluna e as demais entradas iguais.
  - Se duas colunas do determinante são iguais então seu determinante é nulo.
- A definição direta de determinante é interessante e útil em problemas de Combinatória: sendo ρ o conjunto das permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ e o sinal da permutação $\operatorname{sgn}(\sigma)$ -1 elevado à quantidade de inversões que levam σ à identidade,
$$\det(A) = \sum_{\rho} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}.$$

- Algumas propriedades relevantes de determinantes (além da definição): $\det(A^t) = \det(A)$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ se A e B têm o mesmo tamanho, se $a_{ij} = x_i^{j-1}$ então $\det(A) = \prod_{1 \le i < k \le n}(x_k - x_i)$ (determinante de Vandermonde).

- O *posto* p_A de uma matriz A (não necessariamente quadrada!) é o tamanho da maior submatriz quadrada com determinante não nulo, ou a quantidade de linhas não nulas após escaloná-la completamente. Uma propriedade bacana é que $p_{AB} \le \min\{p_A, p_B\}$.

- Um sistema linear com n variáveis e coeficientes reais com matriz incompleta A (coeficientes das variáveis) e matriz completa C (coeficientes das variáveis E independentes) é possível e determinado (solução única) se, e somente se, $p_A = p_C = n$, possível e indeterminado (mais de uma solução) se, e somente se, $p_A = p_C < n$ e impossível (sem soluções) se, e somente se, $p_A \ne p_C$ (de fato, $p_A < p_C$ nesse caso).

- Em sistemas lineares com n variáveis e n equações, a matriz incompleta A é quadrada. Nesses sistemas, a regra de Cramer diz que um sistema é possível e determinado se, e somente se, $|A| \ne 0$.

- Sistemas homogêneos são aqueles em que os coeficientes independentes são todos nulos. Nesse caso, sempre tem a solução trivial (tudo 0), e se a quantidade de equações é igual à quantidade de variáveis, a regra de Cramer determina completamente se há mais soluções ou não.

2.2 Algumas novidades

- Todos os fatos acima continuam válidos para corpos quaisquer, inclusive $\mathbb{Z}_p$.

- Se A é $n \times p$ e B é $p \times n$, com $p \ge n$, então $\det(AB) = \sum_{\mathcal{Z}} \det(A_{\mathcal{Z}})\det(B_{\mathcal{Z}})$, em que $\mathcal{Z}$ são todos os subconjuntos de n índices de $\{1, 2, \ldots, p\}$; tomamos as n colunas correspondentes aos índices $\mathcal{Z}$ de A e as linhas correspondentes de B; se $p < n$ então $\det(AB) = 0$ (podemos "completar" A para ter n colunas e B para ter n linhas com colunas/linhas de zeros).

- Dizemos que V é um *espaço vetorial* sobre um corpo K quando, para todos $\alpha, \beta \in K$ e $u, v \in V$, $\alpha u + \beta v \in V$. Os elementos de V são chamados vetores e os elementos de K são chamados escalares. Exemplos: K^n é espaço vetorial sobre K, $\mathbb{R}$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$, polinômios com coeficientes em K formam um espaço vetorial em K, sequências que satisfazem uma recursão linear homogênea com coeficientes constantes formam um espaço vetorial sobre os complexos.

- Um conjunto A de vetores é *linearmente independente* quando nenhum deles é combinação linear dos outros. Se A é finito, a demonstração usual é provar que se $\sum_{v \in A} \alpha_v v = 0$ então $\alpha_v = 0$ para todo v.

- O espaço vetorial gerado por um conjunto A de vetores, denotado por $\operatorname{span}(A)$, consiste em todas as combinações lineares de elementos de A.

- Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto B que gera V e é linearmente independente. Pode-se provar que a quantidade de elementos da base nunca muda independentemente da base, e essa quantidade de elementos é a dimensão de V. Simbolicamente, $\dim V = |B|$.

- Pode-se provar que cada elemento de um espaço vetorial V de base B é escrito unicamente como combinação linear de elementos de B. Nesse caso, os escalares que multiplicam os elementos de B são as *coordenadas* do vetor em B.

- Caso exista, o *produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é definido por ter as propriedades $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$, $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$, $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, $\langle v, v \rangle \ge 0$ com igualdade se, e somente se, $v = 0$ para todos vetores u, v, w e todo escalar α. Nesse caso, podemos definir módulo de vetor por $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ e ângulo entre vetores por $\cos \angle(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|}$. Em particular, se $\langle u, v \rangle = 0$ os vetores u e v são ortogonais.

- O produto escalar é um produto interno e é definido por coordenadas como $u \cdot v = \sum u_i v_i$.

2.3 Problemas

9. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ inteiros. Mostre que

$$\prod_{1 \le i < j \le n} \frac{a_i - a_j}{i - j}$$

é inteiro.

10. Esmeralda quer fazer o seguinte truque: ela fala em voz alta um número inteiro positivo n e mais $2n$ números reais distintos $x_1 < \ldots < x_{2n}$, ao público. Um membro do público escolhe, sem dizer para ninguém, um *polinômio secreto* $P(x)$ de grau n e coeficientes reais, calcula os $2n$ valores $P(x_1)$, $P(x_2)$, $\ldots$, $P(x_{2n})$, e escreve, em ordem não decrescente, esses $2n$ valores na lousa. Esmeralda então faz o seu truque e adivinha o polinômio secreto, revelando-o para o público.

    Determine se existe uma estratégia para Esmeralda sempre conseguir realizar o truque.

11. Estudantes em uma escola vão tomar sorvete em grupos de pelo menos duas pessoas. Depois de $k > 1$ grupos terem ido tomar sorvete, notou-se que todo par de estudantes foi junto exatamente uma vez. Prove que a escola tem no máximo k estudantes.

12. Seja G um grafo finito simples, com uma lâmpada em cada vértice. Inicialmente todas as lâmpadas estão apagadas. Uma operação consiste em escolher um vértice e mudar o estado de todas as lâmpadas no vértice e em seus vizinhos. Prove que é possível deixar todas as lâmpadas acesas.

13. Seja B um subconjunto de $\mathbb{Z}^n$ com a propriedade de que para quaisquer dois elementos distintos $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ existe i tal que $a_i \equiv b_i + 1 \pmod 3$. Prove que $|B| \le 2^n$.

14. Cada casinha de um tabuleiro $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$, $n \ge 2$, tem 1 ou -1. Uma configuração desse tipo é *supimpa* quando cada número for igual ao produto de seus vizinhos (ou seja, com lado em comum). Encontre a quantidade de configurações supimpas.