Álgebra Linear

Semana Olímpica 2021 - Teresina - PI

Rafael Filipe - rafaelfilipedoss@gmail.com

Problema 1. (OIMU 2005) Considere matrizes quadradas A, B e C de ordem n tais que $A^3 = -I$ e $BA^2 + BA = C^6 + C + I$. É possível termos $n = 2005$?

Problema 2. (Putnam 86) Sejam A, B, C, D matrizes $n \times n$ com entradas em um corpo F tais que AB^t e CD^t são simétricas. Suponha que $AD^t - BC^t = I$. Prove que $A^tD - C^tB = I$.

Problema 3. (IMC 2004) Sejam A uma matriz real 4×2 e B uma matriz real 2×4 tais que:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 4. Sejam A, B, C e D matrizes quadradas tais que $AC = CA$. Mostre que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

Problema 5. (Romênia 98) Determine todas as matrizes com entradas reais tais que

$$X^3 - 4X^2 + 5X = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Problema 6. (IMC 2018) Determine todos os racionais a para os quais a matriz

$$\begin{pmatrix} a & -a & -1 & 0 \\ a & -a & 0 & -1 \\ 1 & 0 & a & -a \\ 0 & 1 & a & -a \end{pmatrix}$$

é o quadrado de uma matriz com coeficientes racionais.

Problema 7. (Berkeley) Para que inteiros positivos n existe uma matriz A 2×2, com entradas inteiras, tal que $A^n = I$ e $A^k \neq I$ para $0 < k < n$?

Problema 8. Sejam A e B matrizes 2×2, com entradas complexas, tais que $\det(AB + BA) = 4\det(AB)$. Prove que $(AB - BA)^2 = 0$.

Problema 9. (Romênia) Sejam A e B matrizes 2×2 com entradas inteiras, tais que $AB = BA$ e $\det B = 1$. Prove que se $\det(A^3 + B^3) = 1$, então $A^2 = 0$.

Problema 10. (Putnam 69) Sejam A e B matrizes 3×2 e 2×3, respectivamente. Suponha que

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Determine o produto BA.

Problema 11. Seja A uma matriz quadrada tal que $A^{2003} = 0$. Mostre que $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A + A^2 + \cdots + A^n)$ $\forall$ n.

Problema 12. (Romênia 2010) Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tais que $ABC = 0$ e rank $B = 1$. Prove que $AB = 0$ ou $BC = 0$.

Problema 13. (Vojetch 2011) Seja $n > k$ e sejam $A_1, \cdots, A_k$ matrizes reais $n \times n$ com posto $n - 1$. Prove que

$$A_1 \cdot \cdots \cdot A_k \neq 0.$$

Problema 14. (OMERJ 2018) Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$ números reais. Considere $G = (g_{i,j})_{i,j=1,\cdots n}$ a matriz $n \times n$ tal que $g_{ij} = \delta_{ij} + a_i a_j$, em que $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e 0 caso contrário. Determine os autovalores de G e calcule sua inversa.

Problema 15. (CIIM 2019) Sejam $\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ um conjunto de m inteiros. Mostre que existe uma matriz $m \times m$ com entradas inteiras A tal que cada uma das matrizes $A + k_j I, 1 \leq j \leq m$, são invertíveis e suas entradas são inteiras.

Problema 16. (IMC 2007) Seja $n > 1$ um inteiro positivo ímpar e $A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ uma matriz $n \times n$ com

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 \text{ se } i = j \\ 1 \text{ se } i - j \equiv \pm 2 \pmod{n} \\ 0 \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule $\det A$.