semana olímpica

OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática.
24^a **Semana Olímpica - Teresina/PI.**
07 a 13 de novembro de 2021.

Prof. Carlos Gomes - DMAT UFRN.
cgomesmat@gmail.com

Números combinatórios e aplicações - Nível Universitário.

---

1 Introdução

Os pilares básicos da combinatória enumerativa são os princípios multiplicativo e aditivo, a partir dos quais deduzimos certas fórmulas que funcionam em casos bem específicos, como por exemplo, a expressão $C(n,p) = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ (com $n, p \in \mathbb{Z}^+$ e $p \leq n$), que é a conhecida **combinação de** n **objetos distintos tomados** p **a** p, que corresponde ao número de subconjuntos com p elementos escolhidos de um conjunto com n elementos distintos. Esse mesmo número também é conhecido na literatura como **número binomial** n **sobre** p (ou n escolhe p) e é representado por $\binom{n}{p} = C(n,p) = \frac{n!}{(n-p)!p!}$. Essa nomenclatura é justificada pelo fato desses números aparecerem como coeficientes do binômio de Newton $(x+a)^n$. Neste pequeno texto veremos várias propriedades dos números binomiais, de como estes se dispõem no Triângulo de Pascal a partir de linhas, colunas e diagonais. Em seguida vamos estudar outros "números combinatórios"(números de Catalan, números de Stirling, números de Bell, entre outros), assim chamados por serem ferramentas úteis para a resolução de diversos problemas de contagem.

2 Coeficientes Binomiais

Definição. 2.1 (Números Binomiais)**.** *Sejam n e k inteiros não negativos. Chamamos números binomiais ou coeficientes binomiais aos números representados por*

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \dfrac{(n)_k}{k!} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} & se\ n \geq k > 0; \\ 1 & se\ k = 0; \\ 0 & se\ n < k. \end{cases}$$

Definição. 2.2 (Triângulo de Pascal)**.** *O quadro abaixo formado pelos números binomiais com a contagem das linhas e colunas a partir do zero em que $\binom{n}{k}$ é um elemento da linha n e coluna k.*

$$\begin{array}{cccccccc}
\binom{0}{0} & & & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & & \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} & \\
\binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Num primeiro contato com o assunto prova-se várias propriedades interessantes dos números binômiais e ao triângulo de Pascal tais como:

Observação. 1 (Propriedades básicas dos números binomiais)**.** *A seguir listamos algumas propriedades básicas dos números binomiais:*

- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ *(Números binomiais complemetares);*
- $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$ *(Relação de Stifel);*
- $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{p+j}{p} = \binom{p+k+1}{p+1}$ *(Teorema das colunas);*
- $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ *(Teorema das linhas);*
- $\displaystyle\sum_{j=0}^{p} \binom{n+j}{j} = \binom{n+p+1}{p}$ *(Teorema das diagonais).*

Definição. 2.3 (Binomial Médio)**.** *Para todo $n \in \mathbb{N}$, chamamos o coeficiente binomial $\binom{2n}{n}$ de binomial médio.*

Exemplo. 2.1 (Número de Euler no Triângulo de Pascal)**.** *Para todo $n \in \mathbb{N}$ seja $s_n = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Mostre que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n-1}s_{n+1}}{s_n^2} = e.$$

Solução. Note-se inicialmente que

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{\prod_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}}{\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}} = \frac{1.\prod_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}}{\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}}. \qquad (1)$$

Ademais,

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)n!}{k!(n+1-k)(n-k)!} = \frac{n+1}{n+1-k}\binom{n}{k}. \qquad (2)$$

De (2) em (1) segue-se que

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{1.\prod_{k=0}^{n}\frac{n+1}{n+1-k}\binom{n}{k}}{\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n\dots 2.1} = \frac{(n+1)^n}{n!}. \qquad (3)$$

De (3) tem-se que para todo $n \geq 1$ que

$$\frac{\frac{s_{n+1}}{s_n}}{\frac{s_n}{s_{n-1}}} = \frac{\frac{(n+1)^n}{n!}}{\frac{(n)^{n-1}}{(n-1)!}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_{n+1}s_{n-1}}{s_n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = e.$$

■

Definição. 2.4 (Coeficiente Binomial Generalizado)**.** *Para todo $r \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$ define-se*

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \frac{(r)_k}{k!} = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!} & \text{se } k > 0; \\ 1 & \text{se } k = 0; \\ 0 & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Observação. 2 (Binômio de Newton Generalizado)**.** *É possível estender Binômio de Newton para todo $r \in \mathbb{R}$ com x e $y \in \mathbb{R}$ tais que $|\frac{x}{y}| < 1$, de tal modo que $(x+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}x^{r-k}y^k$ em que $\binom{r}{k}$ são os coeficientes binomiais generalizados definidos em 2.4.*
Além disso, muitas das propriedades dos coeficientes binomiais ainda continum válidas para os números binomiais generalizados (tais como o Teorema das diagonais e a relação de Stiefel).

3 Coeficientes Multinomiais e o Polinômio de Leibniz

Definição. 3.1 (Coeficiente Multinomial)**.** *Sejam $n, n_1, \dots, n_k$ números naturais tais que $n_1 + \dots + n_k = n$. Definimos o coeficiente multinomial por*

$$\binom{n}{n_1,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\dots n_k!}$$

A nomenclatura **coeficientes multinomiais** vem do fato de que esses números aparecem como coeficientes da expansão multinomial $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$, onde $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}^+$.

Teorema. 1 (Expansão multinomial)**.** *Se $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}^+$, então*

$$(x_1+x_2+\dots+x_k)^n = \sum_{\substack{0\leq n_i\leq n \\ n_1+\dots+a_k=n}} \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots, x_k^{n_k}.$$

Teorema. 2 (Recorrência de Coeficientes Multinomiais)**.** *Se n, $n_1, \dots, n_k$ são inteiros não negativos tais que $n_1 + \dots + n_k = n$, então*

$$\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_k} = \binom{n-1}{n_1-1,n_2,\dots,n_k} + \dots + \binom{n-1}{n_1,n_2,\dots,n_k-1}$$

Definição. 3.2 (Número Catalan)**.** *O n-ésimo número Catalan é definido para todo $n \in \mathbb{N}$ por $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.*

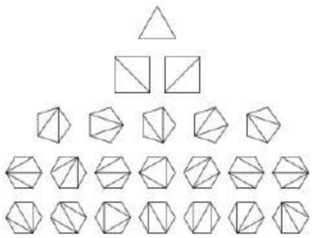
Exemplo. 3.1. *Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, o n-ésimo número Catalan C_n é inteiro.*

Solução. De fato, o número de Catalan $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ pode ser escrito como a diferença de dois números binomiais (que sempre são números inteiros). Vejamos:

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} &= \frac{(2n)!}{n!.n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)n!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{n(2n)!}{n(n-1)!(n+1)n!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{n(2n)!}{n!(n+1)n!} \\ &= \binom{2n}{n}\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n\end{aligned}$$

■

Há várias interpretações combinatórias para o número de Catalan C_n, como por exemplo, o número de triangulações de um polígono convexo de $n+2$ lados correspondem ao número de partições do polígono em n triângulos, i.e., os interiores dos triângulos têm interseção vazia e a soma das áreas dos triângulos é a área do polígono, conforme ilustra a figura a seguir:



Triangulações de polígonos com $n = 3, 4, 5$ e 6 lados.

Se um polígono convexo tem $n + 2$ lados, pode-se demonstrar que existem C_n triangulações possíveis para tal polígono.

Em [3] são apresentadas 214 diferentes interpretações combinatórias do número Catalan determinadas a partir de problemas de contagem.

Definição. 3.3 (Supercatalan)**.** *Para todo $m, n \in \mathbb{N}$ define-se o supercatalan $C(m, n)$ por*

$$C_{m,n} = \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}.$$

Apesar de muitas propriedades do número Supercatalan já terem sido descobertas, ainda não se tem uma prova por *Argumento Combinatório* que $C_{m,n}$ é inteiro. Gessel e Xin mostraram via um argumento combinatório que para $m = 2$ e $m = 3$, mas o problema de que $C_{m,n} = \dfrac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ é inteiro para m e n quaisquer via argumento combinatório ainda segue em aberto.

4 Números de Stirling

Os números de Stirling foram introduzidos pelo matemático escocês James Stirling $(1692 - 1770)$ em 1730 na sua obra "Methodus Differentialis". Coube ao matemático dinamarquês Niels Nielsen $(1865 - 1931)$ denominá-los por Números de Stirling. As notações $\left[{n \atop k}\right]$ e $\left\{{n \atop k}\right\}$, respectivamente, para os números de stirling do primeiro e do segundo tipo foram introduzidas pelo matemático sérvio Jovan Karamata em 1935. No clássico livro "Enumerative Combinatorics" [4] de Peter Stanley são usadas as notações $c(n, k)$ e $S(n, k)$ para, respectivamente, os números de Stirling de primeira e segunda ordem.

Definição. 4.1. *Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e o inteiro $n \geq 0$, definimos a n-ésima potência decrescente de α como sendo*

$$\alpha^{\underline{n}} := \begin{cases} 1, & se\ n = 0; \\ (\alpha)_n = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1), & se\ n > 0. \end{cases}$$

Assim, por exemplo,

$$10^{\underline{4}} = 10(10-1)(10-2)(10-3) = 10.9.8.7 = 5040.$$

Definição. 4.2. *Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e o inteiro $n \geq 0$, definimos a n-ésima potência crescente de α como sendo*

$$\alpha^{\overline{n}} := \begin{cases} 1, & se\ n = 0; \\ \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1), & se\ n > 0. \end{cases}$$

Assim, por exemplo,

$$10^{\overline{4}} = 10(10+1)(10+2)(10+3) = 10.11.12.13 = 17160.$$

4.1 Números de Stirling Tipo I

Nesta subseção estudaremos algumas propriedades dos números de Stirling do tipo I, além de uma interpretação combinatória vinda da teoria dos números.

Fazendo $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, podemos representar as identidades

$$\alpha^{\overline{n}} = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1).$$

da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha^{\overline{1}} \\ \alpha^{\overline{2}} \\ \alpha^{\overline{3}} \\ \alpha^{\overline{4}} \\ \alpha^{\overline{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 11 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 24 & 50 & 35 & 10 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \alpha^4 \\ \alpha^5 \end{pmatrix}$$

em que $\left[{n \atop k}\right]$ é o coeficiente da k-ésima potência de α que aparece na expansão de $\alpha^{\overline{n}}$ é dado por $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] \alpha^k$. Na situação acima tem-se $\left[{n \atop n}\right] = 1$, $\left[{n \atop 0}\right] = 0$ $\forall n \in \{1, \dots, 5\}$, $\left[{2 \atop 1}\right] = \left[{2 \atop 2}\right] = 1$, $\left[{3 \atop 1}\right] = 2$, $\left[{3 \atop 2}\right] = 3$, $\left[{4 \atop 1}\right] = 6$, $\left[{4 \atop 2}\right] = 11$, $\left[{4 \atop 3}\right] = 6$, $\left[{5 \atop 1}\right] = 24$, $\left[{5 \atop 2}\right] = 50$, $\left[{5 \atop 3}\right] = 35$, $\left[{5 \atop 4}\right] = 10$.

Sem perda de generalidade, pode-se construir uma matriz enumerando as linhas e colunas a partir do 0, para um $n \in$ qualquer. As entradas desta matriz serão definidas como os números de Stirling do primeiro tipo e os denotaremos por $\left[{n \atop k}\right]$.

Definição. 4.3 (Números de Stirling tipo I)**.** *Dados os inteiros $n, k \geq 0$ e $k \leq n$, definimos os números de Stirling tipo I como sendo os números $\left[{n \atop k}\right]$ que cumprem a seguinte condição*

$$\alpha^{\overline{n}} := \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1) = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] \alpha^k. \tag{4}$$

com $\left[{0 \atop n}\right] = \left[{n \atop 0}\right] = \left[{n \atop k}\right] = 0$ se $k > n > 0$.

Exemplo. 4.1. *Mostre que*

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right].$$

Solução. Se $n = 0$, o resultado é trivialmente verdadeiro pois da definição 4.3 $0! = 1 = (\alpha)^{\overline{0}} = \left[{0 \atop 0}\right]$.

Se $n \geq 1$, segue-se da definição 4.3 que

$$(x)^{\overline{n}} = (x)(x+1)\dots(x+(n-1)) = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k, \tag{5}$$

e portanto, o resultado segue fazendo-se $x = 1$ em (5). ∎

Teorema. 3 (Relação de Recorrência Números de Stirling Tipo I)**.** *Sejam $n \geq 0$ e $k \geq 1$ inteiros para os quais $k \leq n$, tem-se que*

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Notemos, primeiramente, que $\alpha^{\overline{n+1}} = \alpha^{\overline{n}}(\alpha + n)$ e comparemos o coeficiente de α^k em $\alpha^{\overline{n+1}}$ e $\alpha^{\overline{n}}(\alpha + n)$.

Da definição 4.3 tem-se que o coeficiente de α^k em $\alpha^{\overline{n+1}}$ é $\left[{n+1 \atop k}\right]$.

Calculemos agora o coeficiente de α^k em $\alpha^{\overline{n}}(\alpha + n)$. Tem-se que

$$\alpha^{\overline{n}}(\alpha + n) = \left(\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} \alpha^0 + \ldots + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} \alpha^{k-1} + \ldots + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \alpha^n \right) (\alpha + n),$$

e portanto, os termos contendo α^k serão

$$\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} \alpha^{k-1}\alpha + \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \alpha^k n = \left(\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \right) \alpha^k,$$

como queríamos demonstrar.

Observação. 3. *A seguir listamos algumas propriedades dos números de Stirling do tipo I.*

- $\left[{n \atop n}\right] = 1 \quad \forall n \geq 0.$
- $\left[{n \atop n-1}\right] = \binom{n}{2} \qquad \forall\ n\ \geq\ 1.$
- $\left[{n \atop 1}\right] = (n-1)! \qquad \forall\ n\ \geq\ 1.$
- $\left[{n+m+1 \atop m}\right] = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} (n+k) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}.$
- $\left[{n \atop n-1}\right] = \binom{n}{2} \quad \forall n \geq 1.$
- $\left[{n \atop n-3}\right] = \binom{n}{2}\binom{n}{4} \quad \forall n \geq 4.$

Observação. 4. *Uma interpretação combinatória para os números de Stirling do tipo I é o número de permutações em ciclos. Por exemplo, $\left[{4 \atop 2}\right] = 11$, significa que em 11 das $4! = 24$ permutações dos elementos do conjunto $1, 2, 3, 4$ existem exatamente 2 ciclos. De fato, essas 11 permutações são:* $(12)(34), (13)(24), (14)(32), (124)(3), (142)(3), (123)(4), (132)(4), (134)(2), (143)(2), (1)(234), (1)(243)$.

Note também que cada permutação dos elementos de um conjunto pode ser representada de forma única a partir de uma configuração em ciclos destes mesmos elementos. Seja, por exemplo, $I_4 := \{1, 2, 3, 4\}$ e uma permutação $\sigma : I_4 \to I_4$ dada por $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 4$ e $\sigma(4) = 3$ cuja representação em ciclos seria $(1, 2)(3, 4)$.

Teorema. 4 (Interpretação Combinatória)**.** *Sendo n e k inteiros não-negativos para os quais $k \leq n$, tem-se que $\left[{n \atop k}\right]$ é o número de permutações dos elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ com exatamente k ciclos.*

Os números de Stirling do primeiro tipo $\left[{n \atop k}\right]$ foram definidos a partir da condição $x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k$. Pode-se mostrar pelo Princípio da Indução Finita este mesmo resultado a partir da recorrência (6).

Teorema. 5 (Interpretação em Teoria dos Números)**.** *Sendo n e k inteiros não negativos para os quais $k \leq n$, tem-se que $\left[{n \atop k}\right]$ igual a soma de todos os produtos de $n - k$ elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n-1\}$.*

Da definição 4.3 tem-se que o coeficiente de x^k na expansão de $x^{\overline{n}}$ é $\left[{n \atop k}\right]$ e desde que

$$x^{\overline{n}} = (x + 0)(x + 1)(x + 2) \ldots (x + n - 1) \tag{7}$$

resulta que para obtermos o coeficiente do termo x^k devemos escolher em (7) o termo em x em quaisquer k dos n parênteses e dos $n - k$ parênteses restantes os termos independentes. Observe que o termo independente do primeiro parêntese vale zero, assim os produtos com $n - k$ elementos serão escolhidos em $\{1, \ldots, n-1\}$.

Exemplo. 4.2. *Determine $\left[{4 \atop 1}\right], \left[{4 \atop 2}\right], \left[{4 \atop 3}\right]$ e $\left[{5 \atop 2}\right]$ a partir do teorema 5.*

Solução. $\left[{4 \atop 1}\right] = 1.2.3 = 6;$
$\left[{4 \atop 2}\right] = 1.2 + 1.3 + 2.3 = 11;$
$\left[{4 \atop 3}\right] = 1 + 2 + 3 = 6;$
$\left[{5 \atop 2}\right] = 1.2.3 + 1.2.4 + 1.3.4 + 2.3.4 = 50.$

■

4.2 Números de Stirling Tipo II

Definição. 4.4 (Números de Stirling Tipo II)**.** *O número de Stirling tipo II, $\left\{{n \atop k}\right\}$, é o número de maneiras distintas de particionar um conjunto de n elementos em k subconjuntos não vazios, com a convenção de que $\left\{{0 \atop 0}\right\} := 1$ e $\left\{{n \atop k}\right\} = \left\{{n \atop 0}\right\} = \left\{{0 \atop n}\right\} = 0$ se $k > n > 0$.*

Exemplo. 4.3. *Seja $I_3 = \{1, 2, 3\}$. Determine $\left\{{3 \atop 1}\right\}$, $\left\{{3 \atop 2}\right\}$ e $\left\{{3 \atop 3}\right\}$?*

Solução. $\{\{1, 2, 3\}\}$ é a única partição de $\{1, 2, 3\}$ em um único subconjunto, assim $\left\{{3 \atop 1}\right\} = 1$. Já com dois subconjuntos há 3 partições de I_3: $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$, $\{\{2, 3\}, \{1\}\}$ e uma partição com 3 subconjuntos $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

■

Definição. 4.5 (Número de Bell)**.** *Para todo $n \in$ definimos o n-ésimo número de Bell B_n ao total de partições de um conjunto com n elementos, com $B_0 := 1$.*

Exemplo. 4.4. *Calcule B_3. Mostre que para todo $n \in$*

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}. \tag{8}$$

Solução. B_3 é o número de partições de um conjunto com 3 elementos, a qual conterá partições com 1, 2 ou 3 subconjuntos. Segue-se portanto do exemplo 4.3 que $B_3 = \left\{ {3 \atop 1} \right\} + \left\{ {3 \atop 2} \right\} + \left\{ {3 \atop 3} \right\} = 5$.

O número de partições de um conjunto de n elementos pode ser obtido a partir da soma do total de partições contendo exatamente k suconjuntos, em que $k \in \{1, \ldots, n\}$. Assim, pelo Princípio Aditivo e da definição 4.4, segue-se que

$$B_n = \left\{ {n \atop 1} \right\} + \ldots + \left\{ {n \atop n} \right\} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

■

Observação. 5. *Na equação (8) pode-se ter o somatório variando de $k = 0$; pois se $n > 0$, então $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$ e se $n = 0$, então $B_0 := 1 = \left\{ {0 \atop 0} \right\}$.*

Uma partição não é considerada diferente de outra pela simples mudança na ordem dos subconjuntos. Assim, no exemplo 4.3, se considerarmos as partições de I_3 com 3 subconjuntos, por exemplo, tem-se que $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} = \{\{1\}, \{3\}, \{2\}\} = \ldots = \{\{3\}, \{2\}, \{1\}\}$.

Em alguns problemas combinatórios a ordem dos subconjuntos é levada em conta em cada uma das partições, neste caso, define-se por $a(n)$ o n-ésimo número de Bell ordenado que pode ser obtido a partir da soma dos números de Stirling do tipo II e o fatorial da quantidade de subconjuntos em cada uma das partições.

$$a(n) := \sum_{k=0}^{n} k! \left\{ {n \atop k} \right\}. \tag{9}$$

Exemplo. 4.5. *Uma empresa possui n funcionários e todos estes serão distribuídos em diretorias de diferentes setores. Determine:*

(a) *De quantas maneiras é possível distribuir 4 funcionários, previamente escolhidos, em 3 diretorias?*

(b) *De quantas maneiras é possível distribuir os n funcionários em k diretorias?*

(c) *De quantas maneiras é possível distribuir os funcionários sem qualquer restrição à quantidade de diretorias?*

Solução.

(a) Consideremos, então, um conjunto de $n = 4$ elementos e queremos formar todas as partições ordenadas com 3 subconjuntos. Assim, por exemplo, a partição $\{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$ significa o funcionário 1 na diretoria 1, o funcionário 2 na diretoria 2 e os funcionários 3 e 4 na diretoria 3. Já a partição $\{\{2\}, \{1\}, \{3, 4\}\}$ representa o funcionário 2 na diretoria 1, o funcionário 1 na diretoria 2 e os funcionários 3 e 4 na diretoria 3, que é diferente da primeira configuração formada. Assim, há um total de $\left\{ {4 \atop 3} \right\} = 6$ conjuntos de diretorias em que a ordem não importa, para cada uma destas há 3! diretorias em que a ordem de escolha é relevante. Assim, o total de possibilidades é

$$\left\{ {4 \atop 3} \right\} 3!.$$

(b) É possível escolher $\left\{ {n \atop k} \right\}$ possíveis diretorias sem considerar a ordem de escolha de cada uma delas. Cada uma dessas $\left\{ {n \atop k} \right\}$ escolhas não ordenadas produz $k!$ configurações ordenadas. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o total de maneiras de particionar os n funcionários em k diretorias em que a ordem de escolha é levada em consideração vale

$$\left\{ {n \atop k} \right\} k!. \tag{10}$$

(c) Do item anterior, equação (10), tem-se que o total de possibilidades de distribuir os n funcionários em k diretorias é $\left\{ {n \atop k} \right\} k!$ e desde que $k \in \{1, \ldots, n\}$, pelo Princípio Aditivo tem-se que o total de maneiras possíveis é

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} k!.$$

■

Teorema. 6 (Interpretação Combinatória). $\left\{ {n \atop k} \right\}$ *é o número de maneiras de distribuir n objetos distintos em $k \leq n$ urnas idênticas, sem que nenhuma urna fique vazia.*

Segue imediatamente da definição 4.4 com os objetos sendo os elementos do conjunto e cada uma das k urnas idênticas fazendo o papel de cada um dos elementos da partição.

O próximo teorema nos mostra a relação entre o número de funções sobrejetoras e os números de Stirling do tipo II.

Teorema. 7 (Números de Stirling Tipo II e Funções Sobrejetoras). *Sejam $0 \leq k \leq n$ números naturais, então*

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n. \tag{11}$$

Cada partição de n elementos em k subconjuntos não vazios, gera $k!$ funções sobrejetoras. Assim, $\left\{ {n \atop k} \right\}$ nada mais é que o número de funçoes sobrejetoras $f : A \to B$ em que que $|A| = n$ e $|B| = k$ dividido por $k!$, ou seja,

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{T(n,k)}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

Observação. 6. *Um problema clássico em Matemática discreta é o problema da distribuição em bolas. No caso particular de as bolas serem distinguíveis e as urnas serem indistinguíveis, se tomarmos os elementos dos conjuntos como as bolas distinguíveis e as urnas indistinguíveis como os subconjuntos da* *partição, tem-se que* $\left\{ {n \atop k} \right\}$ *corresponde ao número de maneiras de distribuir* n *bolas em* k *urnas, sem que nenhuma urna fique vazia. Segue-se então, ver apêndice, que o número de maneiras de distribuir* r *bolas em* n *urnas é dado por*

$$B_r = \sum_{k=1}^{r} \left\{ {n \atop k} \right\} \overset{(11)}{=} \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

Observação. 7. *A seguir listamos algumas propriedades dos números de Stirling do tipo II.*

- *Sejam* $n \geq 0$ *e* $k \geq 1$ *inteiros para os quais* $k \leq n$, *tem-se que*
$$\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = \left\{ {n \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n \atop k} \right\}. \quad (12)$$
- $\left\{ {n \atop n} \right\} = \left\{ {n \atop 1} \right\} = 1 \quad \forall n \geq 1$
- $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2} \quad \forall n \geq 1;$
- $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1 \quad \forall n \geq 1;$
- $\left\{ {n \atop n-2} \right\} = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4} \quad \forall n \geq 2;$
- *Para todo* $n \geq 0$ *e* $k \geq 0$ $\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \left\{ {j \atop k} \right\}.$
- $\left\{ {n+m+1 \atop m} \right\} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} k \left\{ {n+k \atop k} \right\}.$

Por fim, o teorema a seguir revela a relação existente entre os números de Stirling do tipo II e as potências de x.

Teorema. 8. *Se* $0 \leq k \leq n \in \mathbb{N}$, *então*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}. \quad (13)$$

A prova será feita por indução. Desde que $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$ se $n > k = 0$ e $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$ se $n \geq 0$, tem-se para $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ que (13) é verdadeira, pois

$$x^0 = 1.x^{\underline{0}} = \left\{ {0 \atop 0} \right\} x^{\underline{0}}.$$
$$x^1 = 1.x^{\underline{1}} = \left\{ {1 \atop 0} \right\} x^0 + \left\{ {1 \atop 1} \right\} x^{\underline{1}}.$$
$$x^2 = 1.x^{\underline{1}} + 1.x^{\underline{2}} = \left\{ {2 \atop 0} \right\} x^{\underline{0}} + \left\{ {2 \atop 1} \right\} x^{\underline{1}} + \left\{ {2 \atop 2} \right\} x^{\underline{2}}.$$

Suponhamos como hipótese de indução que (13) é verdadeira para $n-1$, i.e.,

$$x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}}. \quad (14)$$

Precisamos mostrar que

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}. \quad (15)$$

Note que $x^{\underline{k+1}} = x^{\underline{k}}(x-k)$, e portanto

$$x x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + k x^{\underline{k}}. \quad (16)$$

Da hipótese de indução, como $k = n-1$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
x^n = x x^{n-1} &\overset{(14)}{=} x \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x x^{\underline{k}} = \\
&\overset{(16)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} \left(x^{\underline{k+1}} + k x^{\underline{k}} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} k x^{\underline{k}} \\
&= \left\{ {n-1 \atop 0} \right\} x^{\underline{1}} + \ldots + \left\{ {n-1 \atop n-1} \right\} x^{\underline{n}} + \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} k x^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} x^{\underline{k}} + \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} k x^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} \right] x^{\underline{k}} \\
&\overset{(12)}{=} \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}} \quad \left(\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0 \quad \forall n > 0 \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}.
\end{aligned}$$

5 Exercícios propostos

1. Mostre que:

   (a) $S = \displaystyle\sum_{k \geq 0} (2k+1) \binom{n}{2k+1} = n2^{n-2}.$

   (b) $W = \displaystyle\sum_{k \geq 0} 2k \binom{n}{2k} = n2^{n-2}.$

2. Se $n \in \mathbb{N}$, mostre que:
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{6} + \binom{n}{12} + \binom{n}{18} + \ldots + \binom{n}{6k} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{3} \left[2^{n-1} + \cos \frac{n\pi}{3} + (\sqrt{3})^n \cdot \cos \frac{n\pi}{6} \right].$$

3. (IMO-1981) Seja $1 \leq r \leq n$ e considere todos os subconjuntos de tamanho r do conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Cada um desses subconjuntos tem o menor elemento. Seja $F(n,r)$ a média aritmética destes mínimos. Prove que
$$F(n,r) = \frac{n+1}{r+1}.$$

4. Seja $p(x)$ um polinômio cujos coeficientes são números reais, i.e. $p(x) \in [x]$, tal que $\forall k \in \mathbb{Z}$ tem-se que $p(k) \in \mathbb{Z}$. Mostre que existem $C_0, C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$p(x) = C_n\binom{x}{n} + C_{n-1}\binom{x}{1} + \ldots + C_0\binom{x}{0}.$$

5. Prove que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{2\pi\sqrt{3}+36}{27}$.

6. Prove que quatro números binomiais consecutivos

$$\binom{n}{r}, \binom{n}{r+1}, \binom{n}{r+2}, \binom{n}{r+3}$$

não podem ser termos consecutivos de uma progressão aritmética.

7. Prove que para qualquer inteiro não negativo n a quantidade de números ímpares na lista

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$$

é uma potência de 2.

8. Determine, para cada inteiro não negativo n, a soma

$$\binom{2n}{0}^2 - \binom{2n}{1}^2 + \binom{2n}{2}^2 - \cdots + \binom{2n}{2n}^2.$$

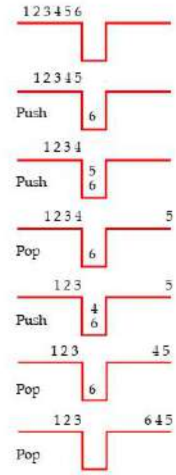
9. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

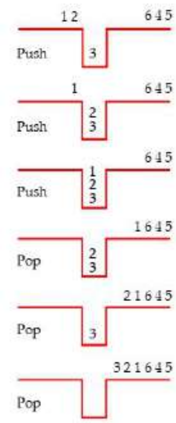
   (a) $(x+y)^{\underline{n}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}}$;

   (b) $(x+y)^{\overline{n}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}}$.

10. Imagine n objetos distintos rotulados por $1, 2, \ldots, n$ alinhados sobre uma reta horizontal, nessa ordem da esquerda para a direita. À direita de n, há um buraco, uma espécie de poço onde os objetos podem ser empilhados uns sobre os outros. Inicialmente, o buraco está vazio. Toma-se o objeto n e empurra-o para dentro do buraco. Então, há duas opções. Ou empurrar o último elemento da linha para o topo da pilha, originalmente denominado push. Ou tirar o elemento do topo da pilha para a direita, originalmente denominado pop. Observe as figuras na margem e acompanhe a evolução dosbobjetos sob a sequência

Push, Push, Pop, Push, Pop, Pop,
Push, Push, Push, Pop, Pop, Pop.





No final do processo, a sequência $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$se tornou $(3, 2, 1, 6, 4, 5)$. Pode ser pensado como uma permutação ou como duas ordens:

123456(do lado esquerdo) e 321645(do lado direito).

Definição. 5.1 (Permutações de pilha)**.** *Uma permutação é uma ordenação por pilha se ela é o resultado de uma sequência de Pushs e Pops aplicados a* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Os números de permutações de pilha para $n = 1, 2, 3, \ldots, 17$ objetos distintos são, respectivamente:

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862,$$

$$16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670.$$

Mostre que o número de permutações de pilha dos elementos do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ é igual ao n-ésimo número de Catalan, $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Referências

[1] Gomes, Carlos A.; Diniz, Iesus C. ; Gurgel, Roberto T., Matemática Discreta - Conjuntos, Recorrências, Combinatória e Probabilidade. Livraria da Física da USP São Paulo, 2021 - 1ª edição.

[2] Tucker, Alan. Applied combinatorics. Wiley Sons , 3rd edition, 1995,

[3] Stanley, Richard. Catalan Numbers. Cambridge University Press, 2rd edition, 2015.

[4] Stanley, Richard. Enumerartive Combinatorics. Cambridge University Press, 1rd edition, 1986.

[5] Souza, Paulo Ney. Silva, Jorge Nuno. Berkley Problens in Mathematics, Springer Verlag, 1998.

[6] Feuillet, Christine; Selom, Isabelle. Algèbre-Geometrie 2° année - MP-MP*, Hachette Supérieur, 2004.

[7] www.obm.org.br

[8] www.imc-math.org.uk