Problemas clássicos (e bem esquecidos)

Plamen Koshlukov

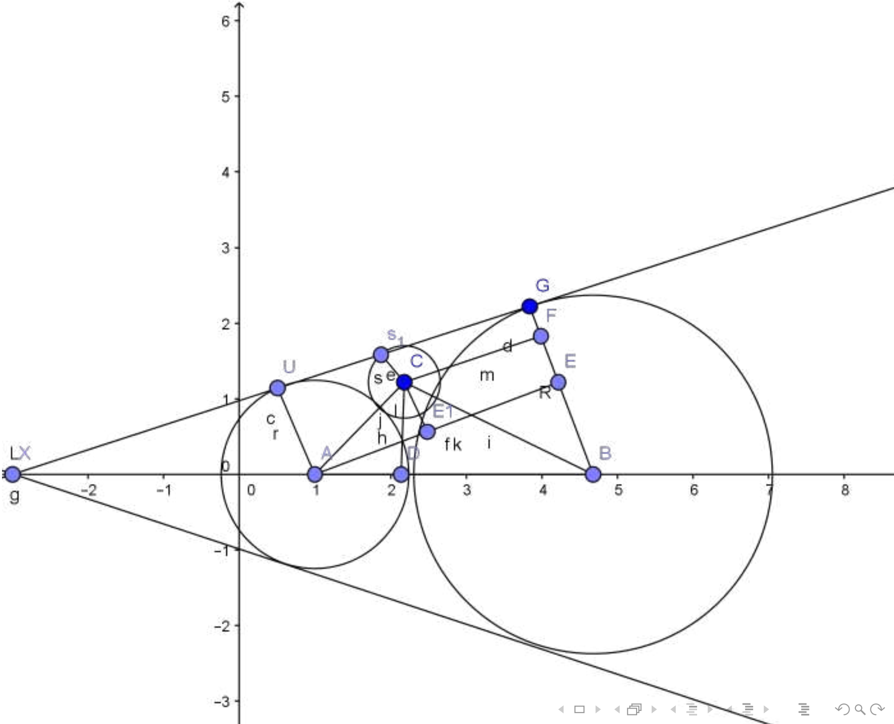
Departamento de Matemática
Universidade Estadual de Campinas, SP, Brasil

Semana Olímpica 2021
Novembro de 2021
Teresina, PI

Rolamento cônico

Problema

Duas esferas S_1 e S_2 estão dentro de um cone circular C. As esferas tangenciam o cone em circunferências, e ainda S_1 tangencia S_2 externamente. Temos n esferas do mesmo raio que formam um "anel" dentro do cone C, de tal forma que cada uma das n esferas tangencia S_1 e S_2 (externamente) e o cone, e tangencia as duas esferas vizinhas no anel.
Encontrar os valores de n para os quais tal configuração é possível.


G
F
E
C
U
s1
s
e
d
m
R
E1
c
r
j
l
h
f k
i
A
D
B
LX
g
0
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8

1. Sejam S_1 e S_2 as duas esferas iniciais, com centros A e B, e raios $r < R$.
2. Suponha s o raio das n pequenas esferas. Seja C o centro de uma dessas n esferas.
   (A seção do cone com o plano que passa pelos centros A, B, C, está no desenho acima.)
3. Denotamos D o pé do perpendicular de C para a reta AB.
4. Os centros das n esferas formam um polígono regular de n vértices, e lado igual a $2s$.
5. O centro deste polígono é o ponto D. Logo a circunferência circunscrita para o polígono tem raio igual a DC.
6. Logo $\operatorname{sen}(\pi/n) = s/CD$.
7. Por Heron para o triângulo ABC temos $(R+r)\cdot CD = 2\sqrt{(R+r+s)Rrs}$.

8 Elevando ao quadrado,

$$\frac{s^2}{CD^2} = \frac{(R+r)^2 s}{4(R+r+s)Rr}.$$

9 Podemos escolher a medida de distância de maneira conveniente: $R + r = 2$.

10 Segue que

$$\operatorname{sen}^{-2}(\pi/n) = Rr(1 + \frac{2}{s}).$$

11 Denotamos G o pé do perpendicular de B para a tangente externa das esferas (na seção pelos centros como no desenho).
Denotamos E e F os pés dos perpendiculares de A e de C para BG.
Finalmente seja E_1 o pé do perpendicular de C para AE.

12 Denotamos ω o ângulo entre a tangente comum das esferas S_1, S_2, e a reta AB (esta é a metade do ângulo de "abertura" do cone). Segue do triângulo ABE que

$$R - r = (R + r)\operatorname{sen}\omega = 2\operatorname{sen}\omega, R = 1 + \operatorname{sen}\omega, r = 1 - \operatorname{sen}\omega.$$

13 Assim $Rr = 1 - \operatorname{sen}^2\omega = \cos^2\omega$.

14 Substituindo em $sen^{-2}(\pi/n) = Rr(1 + \frac{2}{s})$, temos

$$\operatorname{sen}^{-2}(\pi/n) = (1 + 2/s)\cos^2\omega.$$

15 O quadrilátero $CFEE_1$ é retângulo, logo $CF = EE_1$.

16 Pitágoras para os triângulos AE_1C e BFC:
$AE_1^2 = (r+s)^2 - (r-s)^2 = 4rs$,
$CF^2 = (R+s)^2 - (R-s)^2 = 4Rs$.

17 Segue que
$AE = AE_1 + E_1E = AE_1 + CF = 2\sqrt{s}(\sqrt{R} + \sqrt{r})$.

18 Como $\angle EAB = \omega$ e $AB = R + r$ obtemos $2\sqrt{s}(\sqrt{R} + \sqrt{r}) = (R + r)\cos\omega = 2\cos\omega$.

19 Vimos que $Rr = \cos^2\omega$, e obtemos

$$s = \frac{\cos^2\omega}{2(1 + \sqrt{Rr})} = \frac{\cos^2\omega}{2(1 + \cos\omega)}.$$

20 Assim temos

$$\frac{2}{s} = \frac{4(1 + \cos\omega)}{\cos^2\omega}.$$

21 De $\operatorname{sen}^{-2}(\pi/n) = (1 + 2/s)\cos^2\omega$ segue

$$\operatorname{sen}^{-2}(\pi/n) = \cos^2\omega + 4(1 + \cos\omega).$$

22 Simplificando, $\operatorname{sen}^{-1}(\pi/n) = 2 + \cos\omega$.

23 Temos $0 < \cos\omega < 1$, logo $1/3 < \operatorname{sen}\pi/n < 1/2$.

24 As desigualdades

$$\frac{1}{2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} > \operatorname{sen}\frac{\pi}{7} > \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} > \operatorname{sen}\frac{\pi}{9} > 1/3 > \operatorname{sen}\frac{\pi}{10}$$

mostram que os valores de n são 7, 8, 9.

Irredutíveis mas nem tanto

Critério de redutibilidade

Seja $f \in \mathbb{Z}[x]$ e seja p um primo que não divide o coeficiente líder de f. Mostrar que se f, módulo p, é irredutível, então ele é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.
Este é chamado *Critério da redução módulo p* para polinômios com coeficientes inteiros.

Bem como os demais critérios de irredutibilidade, a recíproca desta afirmação falha “globalmente”.

Exemplo

Existe polinômio $f(x)$ com coeficientes inteiros, que não tem raiz racional, mas para todo primo p, a congruência $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$, tem solução.

- Considere o polinômio $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$.
- f é irredutível sobre $\mathbb{Q}$: não tem raiz racional (± 1 não são raízes).
  Se $f(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$, onde a, b, c, d são inteiros, comparando os coeficientes de x^3, x^2, x^1, x^0,

  $$a + c = 0, b + d + ac = -10, ad + bc = 0, bd = 1,$$

  respectivamente. A última implica $b + d = \pm 2$. Como $a = -c$, da segunda igualdade temos $a^2 = 8$ ou 12, absurdo.

Continuação I

1. Se $p = 2$, módulo 2 temos
$$f(x) = (x+1)^4$$
é redutível.
2. Se $p = 3$, módulo 3 temos
$$f(x) \equiv x^4 + 2x^2 + 1 \equiv (x^2+1)^2 \pmod{3}$$
também é redutível.
3. Suponha $p > 3$ um primo. Primeiro observamos que as raízes de $f(x)$ (em $\mathbb{R}$) são os números $\pm\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$ para todas as 4 possibilidades dos sinais $\pm$.

Continuação II

4. Se $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ (o símbolo de Legendre), temos que $x^2 \equiv 2 \pmod{p}$ tem solução y.
   Observem que
   $$(x - (\sqrt{3} + \sqrt{2}))(x - (-\sqrt{3} + \sqrt{2})) = (x - \sqrt{2})^2 - 3,$$
   e módulo p isso será $(x - y)^2 - 3$.
5. Analogamente agrupando as outras duas parcelas na decomposição de $f(x)$, obtemos $(x + y)^2 - 3$.
   Assim se $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ temos que f é redutível módulo p.
6. Quando $\left(\frac{3}{p}\right) = 1$, o procedimento é semelhante.
   Agrupamos as parcelas adequadamente e temos que $f(x)$ é redutível módulo p.

Continuação III

7. Se $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{3}{p}\right) = -1$, pelas propriedades do símbolo de Legendre (multiplicativo) $\left(\frac{6}{p}\right) = 1$. Nesta situação agrupamos

$$(x - (\sqrt{3} + \sqrt{2}))(x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})) = x^2 - 5 - 2\sqrt{6}$$

e analogamente para as duas parcelas restantes. Como $\sqrt{6}$ faz sentido módulo p (no corpo com p elementos), nosso polinômio é redutível sobre qualquer corpo $\mathbb{Z}_p$.

Polinômios de Frobenius

O problema

Seja $f \in \mathbb{Z}[x]$, mônico, e tal que as raízes de f estão contidos no círculo fechado $|z| \leq 1$ em $\mathbb{C}$ (isto é, toda raiz z de f satisfaz $|z| \leq 1$). Mostrar que as raízes de f podem ser apenas 0 e raízes da unidade.

Primeiro "descartamos" as raízes 0 de $f(x)$.
Dividindo $f(x)$ por x^m, onde m é a multiplicidade de 0 como raiz de f, obtemos um polinômio mônico, e que não tem raiz 0.
Logo as raízes do novo polinômio satisfazem $0 < |z| \leq 1$.

Demonstração I

1. Suponha $f(x) = (x - x_1)\cdots(x - x_n)$, definimos o polinômio

   $$f_k(x) = (x - x_1^k)\cdots(x - x_n^k) = x^n + a_1^k x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}^k x + a_n^k.$$

   As raízes de $f_k(x)$ são as k-ésimas potências das raízes de f.
2. Temos $f_k \in \mathbb{Z}[x]$: pelas fórmulas de Girard, e pelo teorema dos polinômios simétricos, os coeficientes de f_k são polinômios simétricos com coeficientes inteiros de $x_1, \ldots, x_n$, logo são números inteiros.

Demonstração II

3 Segue que

$$|a_j^k| = |\sum x_{i_1}^k \cdots x_{i_j}^k| \leq \sum |x_{i_1}^k| \cdots |x_{i_j}^k| \leq \binom{n}{j} \leq 2^n,$$

onde usamos a desigualdade triangular e o fato que $|x_i| \leq 1$. Os somatórios são por todos $1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n$.

4 Segue que os coeficientes de f_k são inteiros limitados entre -2^n e 2^n.

5 Logo existem $k \neq e$ números naturais com $f_k = f_e$. Isso implica que para todo $i = 1, \ldots, n$, $x_i^k = x_{\sigma(i)}^e$, onde σ é permutação de $(1, \ldots, n)$.

Demonstração III

6. Existe número natural p com $\sigma^p = Id$: como são $n!$ permutações, existem $u < v$ com $\sigma^u = \sigma^v$, logo $\sigma^{v-u} = Id$. (Pode ser demonstrado que o menor p com tal propriedade divide $n!$.)
7. Então

$$\begin{aligned} x_i^{k^p} &= (x_i^k)^{k^{p-1}} = (x_{\sigma(i)})^{ek^{p-1}} \\ &= (x_{\sigma^2(i)})^{e^2 k^{p-2}} = \cdots = (x_{\sigma^p(i)})^{e^p k^0} = (x_i)^{e^p}. \end{aligned}$$

8. Logo $x_i^{k^p} = x_i^{e^p}$ para todo i. Se $m = k^p - e^p$, obtemos $x_i^m = 1$.

Polinômio mônico por que?

Mostrar que a afirmação da questão anterior não é válida se *f* não é mônico. (Dica: procurar por polinômios de grau 2.)

Sistema binário

A inclusão das duas questões a seguir foi motivada por um problema da OBM de 2021, que usava fortemente o sistema binário. As duas questões são bem antigas e clássicas, e "cultas".

Começamos com o problema dos pintores.

Pintores

Doze pintores moram em 12 casas, cada uma vermelha ou azul, construídas em torno de uma rua circular.
Todo mês um dos pintores começa a pintar as casas, começando com sua casa, e andando no sentido anti-horário.
Cada pintor obedece a seguinte regra:
1. Se uma casa é vermelha, ele a pinta para azul e vai para a próxima casa.
2. Se a casa é azul, ele a pinta em vermelho, e **volta para sua casa**, sem pintar outras casas.
Cada pintor faz tal “passeio” exatamente uma vez por ano.
Sabe se que no início do ano tinha pelo menos uma casa vermelha.
Mostrar que um ano depois (quando todos pintores fizeram os seus “passeios”), cada casa estará pintada na sua cor original.

Solução I

Consideramos o caso geral, de n pintores e n casas, com as mesmas regras. Exigimos que pelo menos uma casa no início foi vermelha. Queremos mostrar que após os n "passeios", todas casas ficarão com sua cor original.

1. Vamos enumerar as casas de 0 a $n-1$ consecutivamente, começando com uma (qualquer) delas, no sentido anti-horário.
2. Em cada momento podemos associar às cores das casas a sequência $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, onde $c_i = 0$ se a i-ésima casa é vermelha, e $c_i = 1$ se ela é azul.
3. Associamos a esta sequência o número

   $$c_0 \cdot 2^0 + c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot 2^2 + \cdots + c_{n-1} \cdot 2^{n-1} = \overline{c_{n-1} c_{n-2} \ldots c_1 c_0}_{(2)},$$

   o respectivo número escrito na base 2 (isto é $c_i = 0$ ou 1).

Solução II

4. Se $0 \leq i \leq n-1$, denotamos por a_i e por a_{i+1} os números da forma de cima, correspondentes de antes e de depois do passeio do i-ésimo pintor.
Como altera a_i para a_{i+1}? Cada pintor necessariamente chega a alguma casa azul (se todas são vermelhas, ele repinta cada uma em azul, e volta ao seu início, para uma casa azul.)
Supomos que a primeira casa azul que ele chega tenha número j.

5. **Primeiro caso**: $j > i$. Então a_i aumenta com $2^i + 2^{i+1} + \cdots + 2^{j-1}$, pois as casas de números i, $i+1$, ..., $j-1$ têm de ser vermelhas. Depois vai diminuir com 2^j pois a casa j é azul. Logo

$$a_{i+1} = a_i + (2^i + 2^{i+1} + \cdots + 2^{j-1}) - 2^j = a_i - 2^i.$$

Solução III

6. **Segundo caso**: $j < i$. Então o pintor vai até a casa 0 e continua pela rua. O número a_i altera assim: primeiro adicionamos a ele $2^i + 2^{i+1} + \cdots + 2^{n-1} + 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{j-1}$, e depois subtraímos 2^j. Logo

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= a_i + (2^i + 2^{i+1} + \cdots + 2^{n-1} + 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{j-1}) - 2^j \\ &= a_i + (2^n - 1) - 2^i. \end{aligned}$$

7. **Terceiro caso**: $i = j$. Este vai para um dos primeiros dois casos, dependendo de se o i-ésimo pintor pintou apenas sua casa, ou deu a volta completa.
8. Em qualquer dos casos acima, temos que

$$a_{i+1} \equiv a_i - 2^i \pmod{(2^n - 1)}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

Solução IV

9. Agora sejam a e b os dois números na base 2, antes e depois dos passeios de todos pintores. Temos que, independentemente da ordem em que os pintores passeiam,

$$b \equiv a - (1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) \equiv a \pmod{(2^n - 1)}.$$

10. Temos no início pelo menos uma casa vermelha, logo pelo menos um dígito 0 em a. Ainda, em b também temos pelo menos um dígito 0, pois a última casa pintada foi de azul para vermelho.
11. Como $a, b < 2^n - 1$ e $a \equiv b \pmod{(2^n - 1)}$, temos que $a = b$.

Sequência esquisita

Problema

Seja p um primo ímpar dado, definimos a sequência $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ assim.

- $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $\ldots$, $a_{p-2} = p - 2$.
- Se $n \geq p - 1$, escolhemos a_n de tal forma que ele seja o menor inteiro positivo, $a_n > a_{n-1}$, e a_n não forma progressão aritmética de comprimento p com nenhuma $(p - 1)$-upla de números entre a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1}.

Mostrar que a_n é determinado assim:

- Primeiro escrevemos n como número na base $p - 1$.
- Depois lemos este número como que se fosse número escrito na base p.

(Em outras palavras, a sequência consiste dos números escritos em sistema na base p, que não contêm o dígito $p - 1$.)

Solução I

A versão original deste problema foi proposta para $p = 3$, mas vale um resultado mais geral; a demonstração é praticamente a mesma como no caso $p = 3$.
Chamaremos um subconjunto de $\mathbb{N} \cup \{0\}$, de p-livre de progressões, quando ele não contém PA crescente de comprimento p.
Seja b_n o número obtido de n escrevendo n na base $p - 1$ e lendo na base p.
Por indução mostra-se que $a_n = b_n$ para todo n. Escrevemos algumas propriedades do conjunto $B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$.

1. B é p-livre de progressões.
2. Se $b_{n-1} < a < b_n$ para algum $n \geq 1$ então o conjunto $\{b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, a\}$ **não** é p-livre de progressões.

Solução II

Mostraremos abaixo essas duas propriedades de B. Mas primeiro deduzimos o problema a partir dessas duas propriedades.

Pela definição dos a_n e b_n temos que $a_k = b_k$ se $0 \leq k \leq p-2$. Por indução, vamos supor que $a_k = b_k$ para todo $k \leq n-1$, onde $n \geq p-1$.

Pela primeira afirmação acima, o conjunto

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b_n\} = \{b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n\},$$

é p-livre de progressões. Segue que $a_n \leq b_n$. Mas a segunda afirmação nos diz que $a_n < b_n$ é impossível. Segue que $a_n = b_n$ e a questão está resolvida (módulo as duas afirmações).

Solução III

Agora mostraremos as afirmações (1) e (2) de cima. Primeiro observamos que o conjunto B consiste de todos números cuja representação na base p que não contêm o dígito $p-1$.

Solução IV

A afirmação (1) segue de tal fato.
Se a, $a+d$, $a+2d$, $\dots$, $a+(p-1)d$ é PA de comprimento p, então **todos** dígitos (na base p) aparecem em algum dos números da progressão nas suas representações na base p.
Este fato demonstra-se assim. Seja $d = p^m k$, onde p não divide k. Logo d termina com m zeros na base p. Ainda o primeiro dígito δ que precede esses m zeros é não nulo. Suponha α o dígito na posição $m+1$ de a, lendo da direita à esquerda, então os dígitos na posição $m+1$ de a, $a+d$, $a+2d$, $\dots$, $a+(p-1)d$ serão os restos na divisão por p dos números α, $\alpha+\delta$, $\alpha+2\delta$, $\dots$, $\alpha+(p-1)\delta$. Mas este é um sistema completo de resíduos na divisão por p, pois $1 \leq \delta \leq p-1$ é coprimo com p. Assim temos a demonstração de (1).

Solução V

Para (2), observamos primeiro que se $b_{n-1} < a < b_n$ então $a \notin B$.
Como B consiste dos números que, escritos na base p, não contêm o dígito $p - 1$, segue que a tem em alguma posição da sua representação na base p, o dígito $p - 1$.
Denotamos por d o número obtido por a substituindo na sua representação em base p, todos os dígitos diferentes de $p - 1$, por 0. Ainda substituímos todos dígitos $p - 1$ na representação de a por 1.
Consideramos a progressão aritmética

$$a - (p-1)d, a - (p-2)d, a - (p-3)d, \ldots, a - 2d, a - d, a.$$

Pela definição de d, os primeiros $p - 1$ termos desta PA não contêm $p - 1$ na sua representação na base p, e são todos menores que a.

Solução VI

Segue da definição do conjunto B que esses mesmos $p-1$ termos da PA pertencem ao conjunto B (pois $p-1$ não aparece como dígito na base p). Mais precisamente eles têm de pertencer ao conjunto $\{b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}\}$.
Logo o conjunto $\{b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, a\}$ não pode ser p-livre de progressões. A segunda afirmação foi demonstrada.

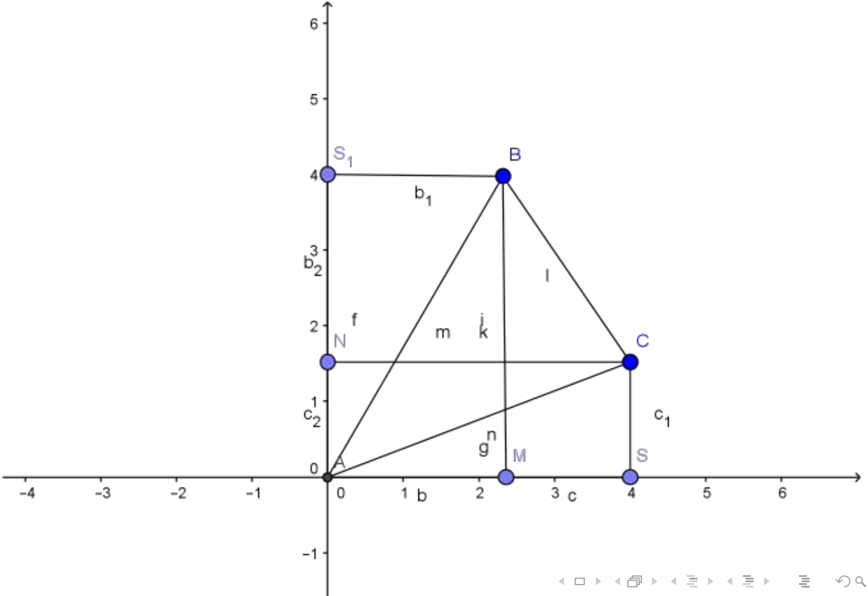
Um pouco de geometria

Questão 1

No tetraedro $SABC$ os ângulos ASB, BSC, CSA são retos, e $SA = SB + SC$. Mostrar que a soma dos ângulos das faces do tetraedro cujos vértices estão em A, é igual a 90°.

Denotamos $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$, então por Pitágoras temos
$AB = \sqrt{a^2 + b^2}$,
$BC = \sqrt{b^2 + c^2}$,
$CA = \sqrt{a^2 + c^2}$.
Sabendo a, b, c, determinamos unicamente o tetraedro.

Desenho



Solução

Por enunciado, temos $a = b + c$. Construímos tetraedro *SABC* tal que $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$, e ainda os ângulos com vértice em S são retos, e a soma dos ângulos com vértice em A é 90°.

Cortando pela aresta *AS*, obtemos a planificação do tetraedro como na figura. Ela é obtida de um quadrado de lado $a = b + c$ onde cortamos um triângulo do vértice oposto a A.

Claramente os ângulos *ASB*, *ASC* são retos. Ainda o ângulo *BSC* é reto pois por construção $BC = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{SB^2 + SC^2}$. (Este ângulo não está na figura.)

O problema

- Qual a maior área da projeção de um cubo de aresta 1 em algum plano?
- Qual a maior área da projeção, em algum plano, de um paralelepípedo retangular de lados a, b, c?

Resolveremos a segunda parte, sendo a primeira um caso particular.

Solução

Seja π um plano no espaço, e suponha que as arestas do paralelepípedo que saem de um mesmo vértice, formam ângulos α, β, γ, com o vetor normal do plano. Então a área *S* da projeção sobre π é

$$ab\cos\gamma + bc\cos\alpha + ca\cos\beta.$$

Para justificar isso: a área da projeção é obtida projetando-se três faces não paralelas. Ainda, a área da projeção de uma face é o produto da área da face e o cosseno do ângulo que esta face forma com o vetor normal do plano.

Solução II

Agora usamos a desigualdade de Cauchy–Schwartz:

$$\begin{aligned} & ab\cos\gamma + bc\cos\alpha + ca\cos\beta \\ & \leq \sqrt{((ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)} \\ & = \sqrt{(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2}. \end{aligned}$$

Igualdade temos quando

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

A resposta de (a) será $\sqrt{3}$, e de (b) será $\sqrt{(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2}$.

Problema

Sejam A um ponto dado no plano e l uma circunferência dada no mesmo plano. Encontrar o lugar geométrico dos centros das circunferências que tangenciam l e passam pelo ponto A. Este lugar geométrico pode ser construído com régua e compasso?

Seja O o centro de l. Temos três casos.

Solução

1. Se A pertence a l, a segunda circunferência tangencia l em A, e seu centro pode estar em qualquer ponto da reta OA, exceto O e A.
2. A está dentro do círculo determinado por l. Seja O_1 o centro da segunda circunferência. O raio dela será O_1A. Ela tangencia l se e somente se $OO_1 + O_1A = r$, onde r é o raio de l. A geometria analítica ensina que este conjunto é elipse com focos em O e em A.
3. A está fora do círculo determinado por l. Então temos ou $O_1O - O_1A = r$, quando a segunda circunferência tangencia l externamente; ou $O_1A - O_1O = r$, quando ela tangencia l internamente. De novo a GA ensina que este conjunto é uma hipérbole.

Solução II

Sobre a construção: apenas no primeiro caso podemos com régua e compasso.
Ressaltamos que cada uma das circunferências que tangenciam l e passam por A pode ser construída com régua e compasso.
Por exemplo: seja B o ponto de tangência das duas circunferências. Então O_1 pode ser encontrado como a interseção da reta OB e da mediatriz do segmento AB.
A circunferência com centro em O_1 e com raio $O_1A = O_1B$ é a procurada. Movendo B ao longo de l, obteremos todas as circunferências procuradas.

E mais geometria

Alunos “comportados”

Um professor desenhou na lousa o gráfico da função (não perguntam como!)

$$y = \frac{1}{x}, \qquad x > 0.$$

Durante o intervalo um aluno apagou os eixos coordenados, mas deixou o gráfico da função.
Quando o professor voltou, não ficou nada contente. Um dos alunos decidiu ajudar: “Professor, podemos tentar recuperar os eixos usando régua e compasso!”
Vamos mostrar como fazer isso, e ajudar a turma e o professor.

Solução I

1. O gráfico é uma das folhas da hipérbole $xy = 1$.
2. A hipérbole é uma cônica central, logo tem diâmetros.
3. Recordamos que se ℓ é uma cônica central (elipse ou hipérbole), vale a seguinte propriedade:
   Os pontos médios de cordas paralelas da cônica determinam uma reta que passa pelo centro da cônica.
4. Esta afirmação é bem conhecida no caso de circunferências, quando ainda temos que o diâmetro é perpendicular às cordas que ele corta no meio.
5. A demonstração no caso geral (faz-se separado para elipse e para hipérbole!) fica a cargo dos leitores.

Solução II

6. Agora construímos com régua e compasso uma corda qualquer da hipérbole. Escolhemos mais um ponto qualquer e fazemos uma reta paralela à primeira corda, até a interseção com a hipérbole.
7. Os pontos médios das duas cordas podem ser construídas com régua e compasso. A reta determinada por esses dois pontos médios passa pelo centro da cônica.
8. Escolhendo outro par de cordas paralelas (e não paralelas às primeiras duas), obtemos mais um diâmetro, e assim temos a posição do centro da cônica.
9. No nosso caso o centro é a origem. Assim localizamos a posição da origem.

Solução III

10. Construímos uma circunferência com centro na origem e raio suficientemente grande para que ela intersecte o gráfico em dois pontos.
11. Esses dois pontos estão simétricos em relação à bissetriz do primeiro quadrante (pois essa bissetriz é um dos eixos da hipérbole).
12. Assim determinamos a bissetriz do primeiro quadrante.
13. Agora falta construir ângulos de 45° nos dois lados da bissetriz e obteremos os eixos. (Reparem que ângulo de 45° pode ser construído com régua e compasso.)

Aritmética (Será?)

Usamos a notação $[x]$ para a parte inteira do número real x: o maior inteiro n tal que $n \leq x$.
Exemplos: $[0] = 0$, $[2021] = 2021$, $[\pi] = 3$, $[-\pi] = -4$.
Denotamos por $\{x\}$ a parte "fracionária" de x, isto é, $\{x\} = x - [x]$ para todo número real x.

Problema

Se $x \in \mathbb{Q}$, $x > 1$, e existe $\lim_{n\to\infty}\{x^n\}$, então $x \in \mathbb{Z}$.

Denotamos $\alpha = \lim_{n\to\infty}\{x^n\}$ e seja $m_n = [x^{n+1}] - [x^n]$. Então temos

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}((x-1)x^n - m_n) \\
&= \lim_{n\to\infty}(x^{n+1} - [x^{n+1}]) - \lim_{x\to\infty}(x^n - [x^n]) \\
&= \alpha - \alpha = 0.
\end{aligned}$$

Usaremos a seguinte afirmação.

Solução I

Afirmação

Seja $x \in \mathbb{Q}$, $x \geq 1$. Suponha $c \neq 0$ e (m_n) uma sequência de inteiros tais que $\lim_{n\to\infty}(cx^n - m_n) = 0$.
Então $x \in \mathbb{Z}$.

A demonstração é feita assim.

1. Seja $x = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$. Escolha $\varepsilon = 1/(p+q)$, então a desigualdade $|cx^n - m_n| < \varepsilon$ vale para todo $n \geq n_0$ para algum n_0.
2. Segue que para $n \geq n_0$ temos

$$|cpx^n - pm_n| < p\varepsilon, \qquad |cqx^{n+1} - qm_{n+1}| < q\varepsilon.$$

Solução II

3. Observe que $cqx^{n+1} = cqx^n p/q = cpx^n$. Logo

$$|pm_n - qm_{n+1}| \leq |pm_n - cpx^n| + |cqx^{n+1} - qm_{n+1}| < p\varepsilon + q\varepsilon = 1.$$

4. O lado esquerdo da desigualdade é inteiro não negativo. Portanto para $n \geq n_0$ temos $|pm_n - qm_{n+1}| = 0$.
5. Isto é, $m_{n+1} = \frac{p}{q} m_n$. Iterando, temos para todo k

$$m_{n_0+k} = \frac{p^k}{q^k} m_{n_0}$$

6. Mas $(p^k, q^k) = 1$ e os m_{n_0+k} são inteiros. Segue $q = 1$ (pois q^k divide m_{n_0}), ou $m_{n_0} = 0$.
7. Mas se $m_{n_0} = 0$ temos $m_{n_0+k} = 0$ para todo k, logo $\lim cx^n = 0$. Esta é uma contradição com $x \geq 1$ e $c \neq 0$.
8. Segue que $q = 1$ e x é inteiro.

Problema

Sejam $a > 1$ e b números naturais tais que $b^n - 1$ divide $a^n - 1$ para todo n natural.
Mostrar que existe um número natural k tal que $a = b^k$.

Observem que a recíproca também é válida, porém trivial.

Afirmação II

Sejam $x_1, \ldots, x_k$ números racionais distintos, $x_i \geq 1$ para todo i. Sejam $c_1, \ldots, c_k$ números não nulos e m_n uma sequência de inteiros tais que $\lim_{n\to\infty}(\sum_{j=1}^{k} c_j x_j^n - m_n) = 0$.
Então os $x_1, \ldots, x_k$ são todos inteiros.

Demonstração I

1. Indução por k. Quando $k = 1$, é a afirmação anterior.
2. Vamos supor o lema válido para $k - 1$. Seja $x_l = p/q$, do enunciado segue que

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{j=1}^{k} c_j p x_j^n - p m_n\Big) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{j=1}^{k} c_j q x_j^{n+1} - q m_{n+1}\Big) = 0.$$

3. Subtraindo a primeira da segunda igualdade, temos

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{j=1}^{k} c_j (x_j q - p) x_j^n - (q m_{n+1} - p m_n)\Big) = 0.$$

Demonstração II

4. Denotando por $d_j = c_j(x_j q - p)$ o coeficiente de x_j^n, temos que $d_l = 0$, e os demais são não nulos, pois $x_j \neq x_l$ se $j \neq l$.
5. Pela indução temos que $x_1, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_k$ são inteiros.
6. Como l foi escolhido arbitrariamente, podemos afirmar que todos $x_1, \ldots, x_k$ são inteiros, e nossa afirmação está demonstrada.

De volta ao problema I

1. Do enunciado segue que $a \geq b$. Então existe número natural k tal que $b^k \leq a < b^{k+1}$.
2. Definimos

$$m_n = \frac{a^n - 1}{b^n - 1} \in \mathbb{Z}, x_j = \frac{a}{b^j}, 1 \leq j \leq k,$$

   e $c_1 = \cdots = c_k = 1$.
3. Como $m_n \in \mathbb{Z}$ pelo enunciado, e $x_j \in \mathbb{Q}$, temos

$$m_n - \sum_{j=1}^{k} c_j x_j^n = \frac{a^n - 1}{b^n - 1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{a^n}{b^{jn}} = \frac{a^n - b^{kn}}{b^{kn}(b^n - 1)}.$$

4. Quando $n \to \infty$, o lado direito acima vai para 0 (pois $b^{k+1} > a$).

De volta ao problema II

5. A afirmação diz que todos x_j são inteiros. Então do lado esquerdo acima teremos número inteiro.
6. Como o limite é 0, temos que

$$\frac{a^n - b^{kn}}{b^{kn}(b^n - 1)} = 0,$$

   para todo n suficientemente grande.
7. Segue que $a^n = b^{kn}$ para n suficientemente grande, logo $a = b^k$.

Agora análise

Problema

Seja $a(x)$ uma função da classe C^1 (isto é, tem derivada contínua), $a(x) \geq 1$ para todo x. A função $f(x)$ é de classe C^2, e satisfaz

$$f(0) = f'(0) = 0, \qquad (af')'(x) + f(x) \geq 0$$

para todo x.
Mostrar que $f(\sqrt{2}) \geq 0$.

Solução I

O número $\sqrt{2}$ pode ser substituído por qualquer número $y \in [0, \pi]$.
Assim mostraremos que para todo $y \in [0, \pi]$ tem-se $f(y) \geq 0$.
Caso 1. A desigualdade $f(x) \leq 0$ vale para todo $x \in [0, y]$.

1. Se $f(x_1) < 0$ para algum $x_1 \in (0, y)$, pelo teorema de Lagrange temos que para algum $x_2 \in (0, x_1)$ vale
$$f'(x_2) = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = \frac{f(x_1)}{x_1} < 0.$$
2. De novo por Lagrange, mas para a função af', temos
$$(af')'(x_3) = \frac{a(x_2)f'(x_2) - a(0)f'(0)}{x_2 - 0} = \frac{a(x_2)f'(x_2)}{x_2} < 0,$$
para algum $x_3 \in (0, x_2)$.

Solução II

3. Mas isso implica $(af')'(x_3) + f(x_3) < 0$, o que contradiz o enunciado.
   Logo neste caso $f(x) = 0$ para todo $x \in [0, y]$.

Caso 2. Existe $x_0 \in (0, y]$ com $f(x_0) > 0$.

1. Vamos supor que $f(y) < 0$; definimos

$$x_1 = \sup\{x \in [0, x_0] \mid f(x) \leq 0\},$$
$$x_2 = \inf\{x \in [x_0, y] \mid f(x) \leq 0\}.$$

2. Então $0 \leq x_1 < x_2 < y$, ainda $f(x_1) = f(x_2) = 0$, e $f(x) > 0$ quando $x \in (x_1, x_2)$.

Solução III

3. A função $g(x) = a(x)f'(x)/f(x)$ satisfaz

$$g'(x) = \Big(\frac{a(x)f'(x)}{f(x)}\Big)' = \frac{(af')'(x)}{f(x)} - \frac{a(x)(f'(x))^2}{f(x)^2}$$
$$= \frac{(af')'(x)}{f(x)} - \frac{g(x)^2}{a(x)} \geq -1 - g(x)^2.$$

4. Afirmamos que $g(x)$ pode assumir valores arbitrariamente grandes em alguma vizinhança de x_1, e valores arbitrariamente pequenos perto de x_2:
Seja $\varepsilon > 0$, e suponha que f atinge valor máximo no ponto p em $[x_1, x_1 + \varepsilon]$. Pelo teorema de Lagrange existe $t \in (x_1, p)$ com

$$f'(t) = \frac{f(p) - f(x_1)}{p - x_1} = \frac{f(p)}{p - x_1} \geq \frac{f(p)}{\varepsilon}.$$

Solução IV

5. Segue que

$$g(t) = a(t)\frac{f'(t)}{f(t)} \geq \frac{f'(t)}{f(t)} \geq \frac{f'(t)}{f(p)} \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

6. De maneira análoga podemos mostrar que a função g no segmento $[x_2 - \varepsilon, x_2]$ assume valor que é menor que $-1/\varepsilon$.
7. A condição $g'(x) \geq -1 - g(x)^2$ implica que

$$(\arctan g(x))' = \frac{g'(x)}{1 + g(x)^2} \geq -1$$

para todo $x \in (x_1, x_2)$.

8. Mas

$$\lim_{t \to -\infty} \arctan t = -\pi/2, \quad \lim_{t \to +\infty} \arctan t = \pi/2.$$

Solução V

9. Pelas considerações acima, para todo $\delta > 0$ existem $t_1 < t_2$ em (x_1, x_2) com $\arctan(g(t_1)) > \pi/2 - \delta$, e $\arctan(g(t_2)) > -\pi/2 + \delta$.
10. Então existe $p \in (t_1, t_2)$ com

$$(\arctan(g(x))'_{x=p} = \frac{\arctan g(t_2) - \arctan g(t_1)}{t_2 - t_1} < \frac{-\pi + 2\delta}{x_2 - x_1},$$

e o lado direito é < 1 quando δ é pequeno. Isso contradiz a desigualdade acima.

A sobremesa

Este problema é antigo, foi proposto numa olimpíada em 1979. Desde então está no "Hall of Fame".

Clássico

Numa semana olímpica há k alunos participantes. Eles são ou matemáticos, ou semi-matemáticos.
Os matemáticos, como bem sabemos, respondem a **cada pergunta** com a verdade. Os semi-matemáticos às vezes respondem com a verdade, às vezes não (sem padrão nas respostas).
Sabemos que os matemáticos entre os k participantes são mais que os semi-matemáticos. Cada participante conhece quem são os demais participantes (matemáticos ou semi-matemáticos).
Como podemos saber quem dos participantes é matemático e quem é semi-matemático, fazendo apenas perguntas do tipo "Fulano é matemático?"

Solução I

Foi demonstrado por P. Blecher, Discr. Math. **43**, 1983, 107–110, que o menor número de perguntas é $[(3k-3)/2]$. Aqui faremos uma construção mais simples e transparente, porém precisaremos mais perguntas.

1. Enumeramos os participantes de 1 a k, e fazemos, ao participante de número i, a seguinte pergunta:
   Quem é o participante de número $i+1$? (Segundo as regras temos de perguntar: "O participante de número $i+1$ é matemático?")
2. Começamos com o primeiro. Se a resposta dele for **SIM** continuamos com o segundo, e assim por diante, até chegarmos à primeira resposta **NÃO**.
   Vamos supor esta primeira resposta **NÃO** foi dada à pergunta feita ao aluno de número N.

Solução II

3. Observem que todos matemáticos com números de 1 a N responderam que o seu vizinho à direita é matemático.
4. Removemos da fila os participantes de números N e $N + 1$, e perguntamos ao número $N - 1$ quem é seu novo vizinho à direita.
5. O procedimento continua como acima: obtendo resposta do número T que o vizinho à direita é semi-matemático, removemos os dois da fila e continuamos, até chegarmos ao final da fila.
6. Obteremos assim uma fila onde cada um dos participantes declarou que seu vizinho à direita é matemático.
   Os demais participantes foram divididos em pares, e em cada par um dos alunos declarou que o outro é semi-matemático.

Solução III

7. Em cada um desses pares pelo menos um dos participantes é semi-matemático (pode ser os dois): se os dois são matemáticos, não teríamos removido o par da fila.
8. Segue que a quantidade de matemáticos retirados da fila não pode ser maior que a dos semi-matemáticos.
   Logo na fila que sobrou temos mais matemáticos do que semi-matemáticos.
9. Isso implica que temos pelo menos um matemático na fila que sobrou.
   Mas tendo um matemático, em alguma posição, à direita dele também temos matemático, e assim por diante até o final da fila.

Solução IV

10. Em particular, o **ÚLTIMO** da fila é matemático.
    Ainda, se na fila temos pelo menos dois alunos, os últimos dois são matemáticos.
11. Tudo isso foi feito com no máximo $k - 1$ perguntas.
12. Se na fila que sobrou temos mais de 1 aluno, sabemos que os últimos dois são matemáticos. Perguntamos o último sobre os primeiros $k - 2$ e teremos no total $\leq k - 1 + k - 2 = 2k - 3$ perguntas.
13. Se na fila sobrou apenas um aluno, ele é matemático.
    Em cada par removido, pelo menos um dos participantes é semi-matemático.
    Mas como temos mais matemáticos do que semi-matemáticos, em cada par removido temos **exatamente** um matemático e um semi-matemático.

Solução V

14 Perguntando o aluno que sobrou na fila sobre **UM** participante de cada par, saberemos quem é quem.

15 Neste segundo caso faremos $k - 1 + (k - 1)/2$ perguntas (o número k é impar).
Logo faremos $(3k - 3)/2$ perguntas neste caso.