



20ª Vingança Olímpica  
24ª Semana Olímpica – Teresina, PI  
10 e 11 de Novembro de 2021

- Não escreva mais de uma questão por folha.
- Escreva seu nome em cada folha que usar.

**Problema 1.** Sejam  $a, b, c, k$  reais positivos, tais que  $ab + bc + ca \leq 1$  e  $0 < k \leq \frac{9}{2}$ . Prove que

$$\sqrt[3]{\frac{k}{a} + (9 - 3k)b} + \sqrt[3]{\frac{k}{b} + (9 - 3k)c} + \sqrt[3]{\frac{k}{c} + (9 - 3k)a} \leq \frac{1}{abc}.$$

**Problema 2.** Evan é um ser  $n$ -dimensional que vive numa casa formada pelos pontos de  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ . Seu quarto é o conjunto dos pontos da casa cujas coordenadas são todas menores ou iguais a 2021.

O quarto de Evan foi infestado por amebas, então ele resolve expulsá-las de lá através de *capturas*. Uma *captura* pode ser realizada para eliminar uma ameba do ponto  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  e substituí-la por  $n$  amebas: uma em cada um dos pontos  $(a_1 + 1, a_2, \dots, a_n), (a_1, a_2 + 1, \dots, a_n), \dots, (a_1, a_2, \dots, a_n + 1)$ . Porém, duas amebas jamais podem ocupar o mesmo ponto da casa.

Determine, para cada  $n$ , a maior quantidade  $A(n)$  de amebas tais que, para alguma disposição inicial dessas amebas no quarto de Evan, ele consegue cumprir seu objetivo com uma quantidade finita de capturas.

**Problema 3.** Sejam  $I, C, \omega$  e  $\Omega$  o incentro, o circuncentro, incírculo e circuncírculo, respectivamente, do triângulo escaleno  $XYZ$  com  $XZ > YZ > XY$ . O incírculo  $\omega$  é tangente aos lados  $YZ, XZ$  e  $XY$  nos pontos  $D, E$  e  $F$ . Seja  $S$  o ponto no circuncírculo  $\Omega$  tal que  $XS, CI$  e  $YZ$  são concorrentes. Sejam  $(XEF) \cap \Omega = R, (RSD) \cap (XEF) = U, SU \cap CI = N, EF \cap YZ = A, EF \cap CI = T$  e  $XU \cap YZ = O$ .

Prove que NARUTO é cíclico.

*”O Naruto pode ser um pouco duro às vezes”*

**Problema 4.** Em um tabuleiro de xadrez, Po controla uma dama branca e joga, em turnos alternados, contra um rei preto invisível (só há essas duas peças no tabuleiro). O rei não pode se mover para uma casa onde ficaria em cheque e nem capturar a dama. Cada vez que o rei faz um movimento, Po recebe uma mensagem do além que diz para qual direção o rei se moveu (cima, direita, cima-direita, etc). Seu objetivo é fazer com que o rei não consiga mais se mover.

Po consegue alcançar seu objetivo em, no máximo, 150 jogadas, sem depender da posição inicial das peças?

**Problema 5.** Prove que não há inteiros positivos  $a, b, c, d$  formando uma progressão aritmética de modo que  $ab + 1, ac + 1, ad + 1, bc + 1, bd + 1, cd + 1$  sejam todos quadrados perfeitos.

Linguagem: Português

Tempo: 5 horas.

Cada problema vale 7 pontos.

*”A vingança nunca é plena, mata a alma e a envenena”*

– Seu Madruga