QUESTÃO 1

Sejam $A_1, \ldots, A_8$ conjuntos tais que $|A_i| = 3$ e $|A_i \cup A_j| = 5$ para $1 \leqslant i < j \leqslant 8$. O total de elementos de $A_1 \cup \cdots \cup A_8$ é:

(a) 10

(b) 15

(c) 17

(d) 21

(e) 24

QUESTÃO 2

Quantas são as soluções reais da equação

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0?$$

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

(e) 5

QUESTÃO 3

O resto da divisão de $2^{2021} + 3^{2021}$ por 17 é

(a) 12

(b) 13

(c) 14

(d) 15

(e) 16

QUESTÃO 4

Para $x \in (-1, 1)$ escreva

$$\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)^2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Quanto vale a_3?

(a) 0

(b) 1

(c) 4

(d) 8

(e) 16

QUESTÃO 5

Para qual matriz X, existe um par de matrizes A, B tais que $AB - BA = X$?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

QUESTÃO 6

Considere um icosaedro regular de centro O. Para cada par de vértices V_0, V_1, distintos e não antípodas, consideramos o plano passando por O, V_0, V_1. Quantos planos distintos construímos dessa forma? Obs.: um icosaedro é um poliedro convexo com 20 faces, 12 vértices e 30 arestas.

(a) 15

(b) 30

(c) 45

(d) 60

(e) 120

QUESTÃO 7

Qual dos valores abaixo é o mais próximo da seguinte integral?

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2021}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{2021x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{|x|+64}}{1+x^2}\,dx$$

(a) 8

(b) 1

(c) 30

(d) 31

(e) 2021

QUESTÃO 8

Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida pela série abaixo:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(x+n)^2} + \cdots$$

Quanto vale a integral abaixo?

$$\int_1^2 f(x)dx$$

(a) $\frac{1}{2}$

(b) 1

(c) $\frac{\pi^2}{4}$

(d) $\frac{\pi^2}{6}$

(e) $\frac{\pi^2}{8}$

QUESTÃO 9

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita ser de classe C^2 se ela é duas vezes diferenciável e sua segunda derivada é contínua. Um ponto de inflexão de uma função C^2 é um ponto $x \in \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = 0$. Se f é C^2 e tem exatamente 2021 pontos críticos, qual é o maior valor de N para o qual se garante que tal função tem pelo menos N pontos de inflexão?

(a) 2020

(b) 2021

(c) 2022

(d) 2023

(e) Nenhuma das alternativas anteriores

QUESTÃO 10

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que existe $a \neq 0$ com a seguinte propriedade: a área do triângulo cujos lados têm suportes no eixo y, na reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$ e na reta normal ao gráfico de f em $(a, f(a))$ e seus vértices são dados pelas interseções de cada par das retas anteriores é $5/4$. Sabendo que $f'(a) = 2$, encontre a^2.

(a) 1

(b) 4

(c) 9

(d) 16

(e) 25

QUESTÃO 11

Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = (3x - 2y, x - 2y)$$

Seja $\mathbb{Z}^2$ o subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$ formado pelos pontos com ambas as coordenadas inteiras. Seja $f(\mathbb{Z}^2)$ a imagem de $\mathbb{Z}^2$ por f e denote por q_N o tamanho do conjunto $\{(x, y) \in f(\mathbb{Z}^2) \mid -N < x, y < N\}$. Calcule o limite

$$\lim_{N\to\infty} \frac{q_N}{N^2}$$

(a) 1/2

(b) 1

(c) 3

(d) 4

(e) 16

QUESTÃO 12

Seja p_k o k-ésimo número primo. O famoso Teorema dos Números Primos diz que $\lim_{k\to+\infty} \frac{p_k}{k \log k} = 1$. Defina

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k \log k}.$$

Assinale a alternativa que se verifica para todos os termos s_n com $n \geqslant 3$.

(a) A sequência s_n é limitada

(b) Existem constantes reais positivas c, C tais que

$$c \log \log n \leqslant s_n \leqslant C \log n.$$

(c) Existem constantes reais positivas c, C tais que

$$c \log n \log \log n \leqslant s_n \leqslant C \frac{n}{\log n}.$$

(d) Existem constantes reais positivas c, C tais que

$$c \frac{n \log \log n}{\log n} \leqslant s_n \leqslant Cn.$$

(e) Existe uma constante real positiva c tal que

$$cn \log n \leqslant s_n.$$

QUESTÃO 13

Seja B a matriz 2×2 obtida através do limite:

$$B = \lim_{n\to\infty}\left(I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^n}{n!}\right),$$

onde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Podemos afirmar que $\ln(\det B)$ é igual a:

(a) 3

(b) 0

(c) 2

(d) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

(e) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

QUESTÃO 14

Qual o valor que melhor aproxima a seguinte soma?

$$\frac{1}{1^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} - \frac{1}{17^3} + \frac{1}{19^3} - \frac{1}{23^3} + \frac{1}{25^3} - \frac{1}{29^3} + \cdots$$

(a) $\dfrac{\pi^3}{18\sqrt{3}}$

(b) $\dfrac{\pi^3}{8\sqrt{2}}$

(c) $\dfrac{5\pi^3}{\sqrt{3}}$

(d) $\dfrac{\pi^3}{\sqrt{2}}$

(e) $\dfrac{7\pi^3}{25\sqrt{3}}$

QUESTÃO 15

Para n natural, seja A_n a matriz 2×2 com entradas $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{Z}$ dada por

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n$$

(a n-ésima potência da matriz de entradas $2, 1, -1, 2$). Para quantos valores de n dentre $1, 2, \ldots, 2021$ a entrada c_n é um múltiplo de 7?

(a) 250

(b) 251

(c) 252

(d) 253

(e) 254

QUESTÃO 16

Um embaralhamento perfeito de uma pilha com 32 cartas numeradas de 1 a 32 é um reordenamento obtido dividindo-se a pilha em duas pilhas iguais e formando uma nova pilha adicionando-se sucessivamente uma carta da primeira pilha e uma carta da segunda pilha. Quantas vezes necessitamos repetir um embaralhamento perfeito para retornarmos à ordenação inicial?

(a) 4

(b) 5

(c) 6

(d) 7

(e) 8

QUESTÃO 17

Uma fábrica possui três máquinas de fabricar copos, identificadas pelas letras A, B e C, que fabricam 25, 35 e 40 por cento do total de copos, respectivamente. Dos copos fabricados por A,B e C, sabe-se que 5, 4 e 2 por cento são defeituosos, respectivamente. Um copo é escolhido ao acaso e está defeituoso. Qual a chance de ele ter sido fabricado pela máquina A?

(a) $\frac{1}{4}$

(b) $\frac{25}{69}$

(c) $\frac{133}{345}$

(d) $\frac{140}{345}$

(e) $\frac{11}{46}$

QUESTÃO 18

Dois candidatos, Arnaldo e Bernaldo, participaram de uma eleição para síndico com 100 votantes. Ao fim, 60 pessoas votaram em Arnaldo e 40 em Bernaldo. A chance que durante a apuração dos votos Arnaldo esteja sempre a frente de Bernaldo é de:

(a) 60%

(b) 40%

(c) 20%

(d) 10%

(e) Nenhuma das alternativas anteriores.

QUESTÃO 19

Sejam a, b, c, d números reais tais que

$$a = \sqrt{4 + \sqrt{3 + a}},$$

$$b = \sqrt{4 - \sqrt{3 + b}},$$

$$c = \sqrt{4 + \sqrt{3 - c}},$$

$$d = \sqrt{4 - \sqrt{3 - d}}.$$

O valor de $abcd$ é:

(a) 13.

(b) 15.

(c) 17.

(d) 19.

(e) 21.

QUESTÃO 20

O valor do limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \dots \cdot 2n}.$$

é igual a

(a) 0.

(b) 1.

(c) $+\infty$.

(d) $\sqrt{2}$.

(e) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

QUESTÃO 21

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência dada por $x_0 = 1/2$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 1/27^{x_n}$. Então:

(a) A sequência (x_n) converge.

(b) A sequência (x_n) não converge, mas suas subsequências (x_{2n}) e (x_{2n+1}) convergem a limites estritamente positivos.

(c) A sequência (x_n) não converge, mas sua subsequência (x_{2n}) converge a um limite estritamente positivo e sua subsequência (x_{2n+1}) converge a 0.

(d) A sequência (x_n) não converge, e suas subsequências (x_{2n}) e (x_{2n+1}) também não convergem.

(e) A sequência (x_n) não converge, sua subsequência (x_{2n}) também não converge mas sua subsequência (x_{2n+1}) converge a 0.

QUESTÃO 22

Quantas progressões aritméticas de 3 termos distintos tem o conjunto

$$C = \{x = \sum_{i=0}^{2021} a_i 3^i; a_i \in \{0,2\}\}?$$

(a) 0

(b) 37

(c) 2021

(d) 2021^2

(e) Nenhuma das respostas anteriores

QUESTÃO 23

Seja $\mathbb{F}_{11} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{10}\}$ o corpo finito com 11 elementos (em que as operações de soma e produto são efetuadas módulo 11). Escolhendo uma matriz 3×3 com entradas em $\mathbb{F}_{11}$ aleatoriamente, qual a probabilidade de que ela tenha posto exatamente igual a 1? (Lembre que o posto de uma matriz $n \times n$ sobre um corpo k é a dimensão do espaço vetorial sobre k gerado por seus vetores coluna).

(a) $\dfrac{11^6 - 1}{11^9}$

(b) $\dfrac{(11^3 - 11 - 1)(11 + 1)}{11^9}$

(c) $\dfrac{(11^2 - 1)(11 + 1)}{11^9}$

(d) $\dfrac{(11^3 - 1)(11^2 + 11 + 1)}{11^9}$

(e) $\dfrac{1}{11^3}$

QUESTÃO 24

Considere a sequência (a_n) de números reais definida recursivamente por

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = \text{sen}(a_n);$$

ângulos são dados em radianos. Quanto vale o limite abaixo?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(a_n)}{\log(n)}$$

(a) 0

(b) $-\frac{1}{2}$

(c) -1

(d) 1

(e) $-\infty$

QUESTÃO 25

A integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\text{sen}(x)}{2+\cos(x)}dx$$

é igual a

(a) 0

(b) 5π

(c) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$

(d) $\ln(2\pi)$

(e) $2\pi\sqrt{2}$