Primeiro Dia

Paraguai, 29 de novembro de 2021

Problema 1. Dizemos que um inteiro positivo é *guarani* se a soma do número com o seu reverso é um número que só possui algarismos ímpares. Por exemplo, 249 e 30 são *guaranis*, já que $249 + 942 = 1191$ e $30 + 03 = 33$.

a) Quantos números de 2021 algarismos são *guaranis*?

b) Quantos números de 2023 algarismos são *guaranis*?

Problema 2. Sejam ABC um triângulo e I seu incentro. As retas BI e CI intersectam o circuncírculo de ABC novamente em M e N, respectivamente. Traçam-se as circunferências C_1 e C_2 de diâmetros NI e MI, respectivamente. A circunferência C_1 intersecta AB em P e Q, e a circunferência C_2 intersecta AC em R e S. Mostre que P, Q, R e S pertencem a uma mesma circunferência.

Problema 3. Em um clube de tênis, cada sócio tem exatamente $k > 0$ amigos, e se organiza um torneio em rodadas tal que cada par de amigos se enfrenta em partidas uma única vez. As rodadas são jogadas em partidas simultâneas, escolhendo pares até que não se possam escolher nenhum mais (isto é, entre as pessoas não escolhidas, não existe um par de amigos que tem sua partida pendente). Determine o número máximo de rodadas que o torneio pode ter, em função de k.

Duração da prova: 4 horas
Pontuação de cada problema: 10 pontos

32.º Olimpiada Matemática del Cono Sur

PARAGUAY

Segundo Dia

Paraguai, 30 de novembro de 2021

Problema 4. Em um monte há 2021 pedras. Dois jogadores A e B jogam retirando pedras do monte, de forma alternada e começando por A. Uma *jogada válida* para A consiste em retirar 1, 2 ou 7 pedras. Uma *jogada válida* para B consiste em retirar 1, 3, 4 ou 6 pedras. Ganha o jogador que deixa o monte vazio logo após realizar uma jogada válida. Determine se algum dos jogadores tem uma estratégia vencedora. Caso essa estratégia exista, explique-a.

Problema 5. Dado um inteiro $n \geq 3$, determine se existem n inteiros $b_1, b_2, \ldots, b_n$, distintos dois a dois (isto é, $b_i \neq b_j$ para todo $i \neq j$) e um polinômio $P(x)$ com coeficientes inteiros, tais que $P(b_1) = b_2$, $P(b_2) = b_3$, $\ldots$, $P(b_{n-1}) = b_n$ e $P(b_n) = b_1$.

Problema 6. Seja ABC un triângulo escaleno com circuncírculo Γ. Sejam P, Q, R, S pontos distintos no lado BC, nessa ordem, tais que $\angle BAP = \angle CAS$ e $\angle BAQ = \angle CAR$. Sejam U, V, W, Z as interseções, distintas de A, de AP, AQ, AR e AS com Γ, respectivamente. Sejam $X = UQ \cap SW$, $Y = PV \cap ZR$, $T = UR \cap VS$ e $K = PW \cap ZQ$. Suponha que estejam bem determinados os pontos M e N, tais que $M = KX \cap TY$ e $N = TX \cap KY$. Demonstre que M, N, A são colineares.

Duração da prova: 4 horas
Pontuação de cada problema: 10 pontos