Prova OMOP 2021

Dia 1 – 18 de dezembro de 2021

1. Juca decidiu chamar de números *sextalternados* os números inteiros positivos de oito algarismos que são múltiplos de 30 e tais que algarismos consecutivos possuem paridades distintas. Ao saber disso, Carlos decidiu classificar como números *super sextalternados* aqueles números que são sextalternados e são múltiplos de 12.

a) Mostre que não existem números super sextalternados.

b) Qual é o menor número sextalternado?

2. Esmeralda criou o cavalo omop para jogar em tabuleiros quadriculados como o tabuleiro de xadrez comum. Se o cavalo omop está num quadradinho ele pode se mover para outro se movendo 1 unidade numa direção e 3 unidades na direção perpendicular. Nesse movimento ele não visita as casas intermediárias. Na figura a seguir se o cavalo omop está na casa C ele pode alcançar as casas marcadas com X. Veja que ele não pode mover 3 unidades para cima, pois sairia do tabuleiro.

			X	
C				
			X	
	X			

Um passeio de tamanho n do cavalo omop é uma sequência de n quadrados C1, C2, ..., Cn todos distintos entre si tal que o cavalo omop começa no quadrado C1 e para cada i de 1 até n-1 pode usar o movimento descrito anteriormente para ir do quadrado Ci para o quadrado C(i+1).

Determine o maior inteiro positivo N tal que existe um passeio de tamanho N do cavalo omop num tabuleiro 5×5.

3. Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB \neq AC$. A mediatriz de BC intersecta as retas AB e AC nos pontos F e E, respectivamente. O circuncírculo de AEF tem centro P e intersecta o circuncírculo do triângulo ABC no ponto D com D diferente de A. Prove que a reta PD é tangente ao circuncírculo do triângulo ABC.

Nota: o circuncírculo do triângulo XYZ é a circunferência circunscrita no triângulo, ou seja, a circunferência que passa por X, Y e Z.

Tempo: 4 horas e 30 minutos

Cada problema vale 7 pontos

Prova OMOP 2021

Dia 2 – 19 de dezembro de 2021

4. Sejam x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 números reais positivos tais que

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 = x_3^2 - x_3x_4 + x_4^2 = x_4^2 - x_4x_5 + x_5^2 = x_5^2 - x_5x_1 + x_1^2$$

Prove que $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$.

5. Num plano são traçadas 3 retas r, s e t. As retas r e s se intersectam perpendicularmente no ponto A. A reta t corta r no ponto B e a reta s no ponto C. Existem exatamente 4 circunferências no plano que são tangentes, simultaneamente, a estas três retas. Prove que o raio de uma dessas circunferências é igual à soma dos raios das outras três circunferências.

6. Um inteiro positivo n é chamado *omopeiro* se existem n inteiros não nulos não necessariamente distintos tais que 2021 é a soma dos quadrados desses n inteiros. Por exemplo, o número 2 não é omopeiro, pois 2021 não é a soma de dois quadrados não nulos, mas 2021 é omopeiro, pois $2021 = 1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2$, uma soma com 2021 quadrados do número 1. Prove que existem mais que 1500 inteiros positivos omopeiros.

A demonstração de que existem pelo menos 500 inteiros positivos omopeiros vale 2 *pontos.*

Tempo: 4 horas e 30 minutos

Cada problema vale 7 pontos