

43ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Nível 1 (6º ou 7º ano)

PRIMEIRO DIA



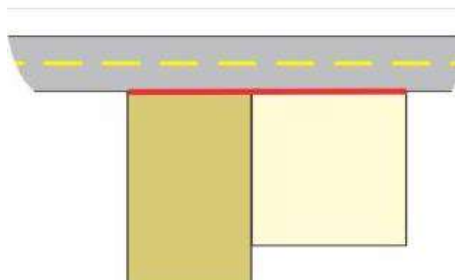
1. Dizemos que um número inteiro positivo é *quadradoso* quando a soma dos seus algarismos é um quadrado perfeito. Por exemplo, os números 211 e 10 são quadradosos, pois $2 + 1 + 1 = 2^2$ e $1 + 0 = 1^2$.

- Qual é o menor número quadradoso que é maior que 2021?
- Qual é o maior número quadradoso sem algarismos repetidos?

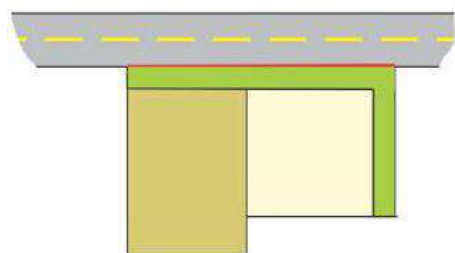
2. Existem quantas triplas de inteiros positivos (a, b, c) com $a < b < c$ tais que a é um divisor de b , b é um divisor de c e $a + b + c \leq 20$?

3. Pedro tem dois terrenos vizinhos, um retangular e um quadrado, ambos de frente para uma rua. Cada um dos terrenos tem 400 m^2 de área. Ele construiu um muro na frente dos dois terrenos, com 36 m de comprimento (linha mais grossa na figura).

- Quais são os perímetros (ou seja, soma das medidas dos lados) dos dois terrenos?



- Pedro fez um gramado de 2 m de largura, acompanhando o muro e a lateral do terreno quadrado, conforme a figura a seguir. Qual é a área total desse gramado?



- Pedro quer doar os terrenos para seus dois filhos José e João. Como José não quer o gramado, mas João quer, Pedro pensou fazer uma passagem de largura x no terreno de José, conforme indicado na figura, deixando o resto do gramado para João. Pedro faria uma cerca reta, como indicada na figura, calculando x de forma que as áreas dos dois terrenos continuassem iguais. Qual deve ser o valor de x ?

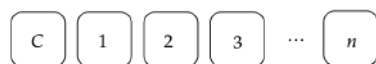


4. Em certa escola há 2021 armários numerados de 1 a 2021. Em certo dia, 2021 alunos decidiram fazer uma brincadeira. Inicialmente, todos os armários estavam fechados. Os alunos se colocaram em ordem para passar pelos armários. O primeiro aluno foi chamado de aluno 1, o segundo de aluno 2, e assim por diante, até o aluno 2021.

Seguindo a fila, o aluno i altera o estado do armário de número i (se o armário estava fechado, ele abre e, se estava aberto, ele fecha) e, em seguida, repete o seguinte processo: ele dobra o número do último armário que ele alterou e, se o resultado for menor que ou igual a 2021, ele altera o estado do armário com o novo número obtido. Se o resultado for maior que 2021, então o aluno encerra sua participação. Por exemplo, o aluno 1 altera o estado dos armários 1, 2, 4, 8, ..., 512 e 1024. Ao dobrar 1024 ele chega em 2048, que é maior que 2021, encerrando assim a sua participação.

- Após a passagem do aluno 16, quais são os armários de 1 a 16 que ficaram abertos?
- Escreva as fatorações em números primos dos números listados no item anterior.
- Após a passagem do aluno 2021, quantos armários ficaram abertos?

5. Certa loja vende modelos de cofres com fechaduras de código que têm n botões numerados de 1 até n e um botão C para começar.



A senha para abrir o cofre é um subconjunto não vazio do conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Para abrir, a pessoa deve apertar C e então digitar a sequência que forme a senha. Caso o cofre não abra, a pessoa pode apertar o C e começar novamente.

Por exemplo, para $n = 4$, se alguém apertar a sequência C413, o cofre será aberto se a senha for $\{4\}$, $\{1, 4\}$ ou $\{1, 3, 4\}$. Como a senha é um subconjunto, a ordem em que os elementos são inseridos não importa. Caso não seja uma dessas, é possível apertar C e continuar testando. Uma nova tentativa poderia ser a sequência C3412, que abriria o cofre caso a senha fosse $\{3\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$ ou $\{1, 2, 3, 4\}$.

Para alguns valores de n , vamos estudar qual é a menor quantidade de vezes que uma pessoa precisa apertar os botões para garantir que o cofre seja aberto. Por exemplo, para $n = 2$, é preciso apertar 5 vezes para garantir que o cofre seja aberto. As senhas possíveis são $\{1\}$, $\{2\}$ e $\{1, 2\}$ e a sequência C12C2 cobre todas as possibilidades. Veja que C12 testa os subconjuntos $\{1\}$ e $\{1, 2\}$. É preciso apertar 3 botões para poder testar o conjunto $\{1, 2\}$ e mais 2 botões, C1 ou C2, para testar o conjunto com um elemento não testado inicialmente com os três botões.

- Para $n = 3$ qual é a menor quantidade de vezes que os botões C, 1, 2 e 3 devem ser apertados para garantir que o cofre seja aberto?
- Para $n = 4$ qual é a menor quantidade de vezes que os botões C, 1, 2, 3 e 4 devem ser apertados para garantir que o cofre seja aberto?

Atenção: Lembre-se que em cada item você deve apresentar um exemplo com a quantidade mínima que você encontrou e provar que apertando menos vezes os botões existe alguma combinação que não é testada.