43ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Nível 2 (8º ou 9º ano)

PRIMEIRO DIA

---

1. Um matemático está se divertindo com números naturais e seus divisores positivos. Para cada inteiro positivo $n \geq 3$, ele faz a seguinte sequência de operações: calcula a quantidade de divisores positivos de n, depois ele toma o número obtido e calcula a quantidade de divisores positivos e assim sucessivamente, até obter o número 2, quando ele finalmente para. A lonjura de n é definida como a quantidade de operações necessárias para se obter o número 2. Note que sempre se chega em 2.

Por exemplo, a lonjura de 12 é 4, pois 12 tem 6 divisores positivos $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, o 6 tem 4 divisores positivos $\{1, 2, 3, 6\}$, o 4 tem 3 divisores positivos $\{1, 2, 4\}$ e o 3 tem 2 divisores positivos $\{1, 3\}$. Note também que 6 tem lonjura 3, 4 tem lonjura 2, e 3 tem lonjura 1.

(a) Quantos números de 3 a 1000 possuem lonjura 2?

(b) Qual é a maior lonjura possível dentre os números de 3 a 1000?

---

2. Seja ABC um triângulo acutângulo. Defina A_1 como o ponto médio do maior arco BC do circuncírculo de ABC. Sejam A_2 e A_3 os pés das perperdiculares de A_1 até as retas AB e AC, respectivamente. Defina B_2, B_3, C_2 e C_3 de modo análogo.

(a) Prove A_2A_3 intersecta BC em seu ponto médio.

(b) Mostre que as retas A_2A_3, B_2B_3 e C_2C_3 são concorrentes.

---

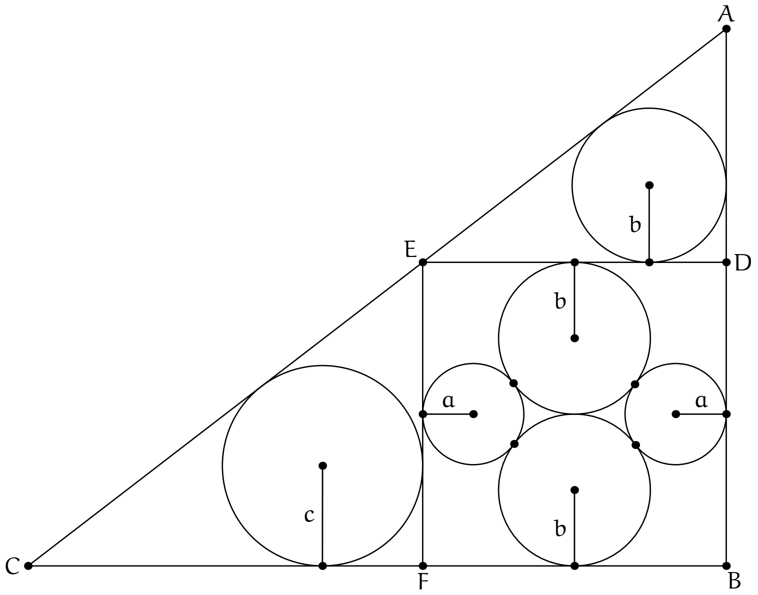
3. Em um campeonato de futebol com 2021 times, todos jogam contra todos exatamente uma vez. Ao final de cada partida, em caso de empate, cada time ganha 1 ponto e, caso contrário, o vencedor da partida ganha 3 pontos e o perdedor não ganha e nem perde ponto. Ao final do campeonato, os dois times com as maiores pontuações disputam uma final. O OBM Futebol Clube venceu a sua primeira partida e sabe-se que, por terem vencido o campeonato anterior, eles levam vantagem em qualquer caso de empate na soma de pontos final. Qual é a pontuação final mínima para que o OBM Futebol Clube tenha alguma chance de ir para a final?

43ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 2 (8º ou 9º ano)

SEGUNDO DIA

4. Na figura a seguir temos um triângulo ABC, retângulo em B, e $BDEF$ é um quadrado inscrito nesse triângulo. As circunferências inscritas nos triângulos CFE e EDA possuem raios c e b, respectivamente. No interior do quadrado desenham-se duas circunferências de raio b e duas circunferências de raio a, cada uma tangente a um dos lados do quadrado, como mostra a figura. Sabe-se que as circunferências de raio b no interior do quadrado são tangentes entre si e tangentes às duas de raio a. Lembre-se que quando temos duas circunferências tangentes, o centro é colinear com o ponto de tangência.



Determine a razão $\frac{c}{a}$.

5. Uma tripla de inteiros positivos (a, b, c) é chamada *miranha* se

- a divide $bc + 1$;
- b divide $ca + 1$;
- c divide $ab + 1$.

Determine todas as triplas miranhas.

6. Seja $\alpha \geq 1$ um número real. Considere o conjunto

$$A(\alpha) = \Big\{\lfloor n\alpha \rfloor \mid n \text{ inteiro positivo} \Big\} = \Big\{\lfloor \alpha \rfloor,\ \lfloor 2\alpha \rfloor,\ \lfloor 3\alpha \rfloor,\ \lfloor 4\alpha \rfloor,\ \ldots\Big\}.$$

Suponha que todos os inteiros positivos que **não pertencem** ao conjunto $A(\alpha)$ são exatamente os inteiros positivos que deixam um determinado resto r na divisão por 2021, com $0 \leq r < 2021$. Determine todos os possíveis valores de α.

Observação: O símbolo $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo, se $\alpha = \sqrt{3}$, temos $\lfloor \sqrt{3} \rfloor = \lfloor 1{,}73\ldots \rfloor = 1$, $\lfloor 2\sqrt{3} \rfloor = \lfloor 2 \cdot 1{,}73\ldots \rfloor = 3$, $\lfloor 3\sqrt{3} \rfloor = \lfloor 3 \cdot 1{,}73\ldots \rfloor = 5$, $\lfloor 4\sqrt{3} \rfloor = \lfloor 4 \cdot 1{,}73\ldots \rfloor = 6$ e assim por diante. Nesse caso temos $A(\alpha) = \{1,\ 3,\ 5,\ 6, \ldots\}$.