43ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Nível 3 (Ensino Médio)

PRIMEIRO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

---

1. Sejam $ABCD$ um quadrilátero convexo no plano e O_A, O_B, O_C e O_D os circuncentros dos triângulos BCD, CDA, DAB e ABC, respectivamente. Suponha que esses quatro circuncentros sejam pontos distintos. Prove que esses pontos não estão em uma mesma circunferência.

---

2. Seja n um inteiro positivo. Em um tabuleiro $2 \times 3n$, marcamos algumas casas, de modo que qualquer casa (marcada ou não) seja adjacente a no máximo duas outras casas marcadas distintas (duas casas são *adjacentes* quando são distintas e têm ao menos um vértice em comum, ou seja, são vizinhas na horizontal, vertical ou diagonal; uma casa *não* é adjacente a si mesma).

(a) Qual é o maior número possível de casas marcadas?

(b) Para esse número máximo, de quantas maneiras podemos marcar as casas? Configurações distintas que podem ser obtidas através de rotação ou reflexão são consideradas distintas.

---

3. Encontre todos os inteiros positivos k para os quais existe um irracional $\alpha > 1$ e um inteiro positivo N tal que $\lfloor \alpha^n \rfloor$ é um quadrado perfeito menos k para todo n inteiro com $n > N$.
Observação: $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro que é menor ou igual a x.

43ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Nível 3 (Ensino Médio)

SEGUNDO DIA

---

4. Um conjunto X de números reais, infinito ou não, é *limitado* quando existe M real tal que $|x| \le M$ para todo $x \in X$. Por exemplo, $A = [-3;\pi[$ e $B = \{2^{-k}, k \in \mathbb{Z}_{>0}\} = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \ldots\right\}$ são limitados (tome $M \ge \pi$ e $M \ge 1$, respectivamente). Por outro lado, $C = \mathbb{Z}$ e $D = \mathbb{R}_{<0}$ não são limitados.
Um conjunto A de números reais é *enquadrado* quando é limitado e, para todos $a, b \in A$, não necessariamente distintos, $(a-b)^2 \in A$. Qual é o menor número real que pertence a algum conjunto enquadrado?

---

5. Determine todas as triplas de inteiros não negativos (a, b, c) tais que

$$a^2 + b^2 + c^2 = abc + 1.$$

---

6. Seja $n \ge 5$ inteiro. O polígono convexo $P = A_1A_2\ldots A_n$ é *bicêntrico*, ou seja, tem círculo inscrito e circunscrito. Defina $A_{i+n} = A_i$ para todo i inteiro (ou seja, todos os índices são tomados módulo n). Suponha que para todo i, $1 \le i \le n$, as semirretas $A_{i-1}A_i$ e $A_{i+2}A_{i+1}$ se encontram no ponto B_i. Seja ω_i o circuncírculo de $B_iA_iA_{i+1}$. Prove que existe um círculo tangente simultaneamente a todos os n círculos ω_i, $1 \le i \le n$.