Language: **Portuguese**

Day: **1**

Sexta, 9 de abril de 2022

Problema 1. Seja ABC um triângulo acutângulo onde $BC < AB$ e $BC < CA$. O ponto P pertence ao segmento AB e o ponto Q pertence à AC de modo que $P \neq B$, $Q \neq C$ e $BQ = BC = CP$. Sejam T o circuncentro do triângulo APQ, H o ortocentro do triângulo ABC, e S a interseção dos segmentos BQ e CP. Mostre que T, H e S são colineares.

Problema 2. Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ o conjunto de todos os inteiros positivos. Encontre todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tais que, para quaisquer inteiros positivos a e b, as duas condições a seguir são satisfeitas:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$;

(2) pelo menos dois dos números $f(a)$, $f(b)$ e $f(a+b)$ são iguais.

Problema 3. Uma sequência infinita de inteiros positivos $a_1, a_2, \ldots$ é dita *húngara* se

(1) a_1 é um quadrado perfeito;

(2) para todo inteiro $n \geq 2$, a_n é o menor inteiro positivo tal que

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

é um quadrado perfeito.

Mostre que para qualquer sequência húngara $a_1, a_2, \ldots$, existe um inteiro positivo k tal que $a_n = a_k$ para todo inteiro $n \geq k$.

Language: Portuguese

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Para fazer dessa uma competição justa e agradável para todas, por favor não mencione ou faça referência aos problemas na internet ou nas redes sociais até o sábado, 9 de abril, 22:00 UTC (19:00 horário de Brasília).

Sábado, 9 de abril de 2022

Problema 4. Dado um inteiro positivo $n \geq 2$, determine o maior inteiro positivo N com a propriedade de que existem $N+1$ números reais $a_0, a_1, \ldots, a_N$ tais que

(1) $a_0 + a_1 = -\dfrac{1}{n}$;

(2) $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ para $1 \leq k \leq N-1$.

Problema 5. Para todos os inteiros postivos n, k, seja $f(n, 2k)$ o número de maneiras que um tabuleiro $n \times 2k$ pode ser totalmente preenchido com nk dominós de tamanho 2×1. (Por exemplo, $f(2, 2) = 2$ e $f(3, 2) = 3$.)
Determine todos os inteiros postivos n, tais que, para todo inteiro positivo k, o número $f(n, 2k)$ é ímpar.

Problema 6. Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico com circuncentro O.

As bissetrizes internas de A e B se intersectam em X, as bissetrizes internas de B e C se intersectam em Y, as bissetrizes internas de C e D se intersectam em Z e as bissetrizes internas de D e A se intersectam em W Além disso, seja P a interseção de AC e BD. Suponha que os pontos X, Y, Z, W, O e P são distintos.

Prove que O, X, Y, Z e W estão sobre a mesma circunferência se, e somente se, P, X, Y, Z e W estão sobre a mesma circunferência.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Para fazer dessa uma competição justa e agradável para todas, por favor não mencione ou faça referência aos problemas na internet ou nas redes sociais até o sábado, 9 de abril, 22:00 UTC (19:00 horário de Brasília).