XXVIIIª OLIMPÍADA de MAIO
Primeiro Nível
Maio de 2022

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não é permitido o uso de calculadoras; não é permitido consultar livros ou anotações.
Justifique cada uma das suas respostas.
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 30 de maio.

PROBLEMA 1

Nesta manhã, Emi deixou cair o relógio e a partir daí ele começou a se mover mais devagar. Quando de acordo com o relógio se passaram 2 minutos, na realidade já foram 3. Agora são 18h25 e o relógio diz que são 15h30. A que horas Emi deixou o relógio cair?

PROBLEMA 2

Beto escolheu seis dos nove dígitos de 1 a 9 e escreveu a lista, ordenada do menor para o maior, de todos os números de três dígitos que podem ser formados usando os dígitos que escolheu. Na lista de Beto, o número 317 aparece na posição 22. Que número aparece na posição 60 na lista de Beto? Encontre todas as possibilidades.

PROBLEMA 3

Escolha nove dos dígitos de 0 a 9 e coloque-os nas caixas da figura de modo que não haja dígitos repetidos e a soma indicada seja correta.

$$\begin{array}{rr} & \square\square\square \\ + & \square\square\square \\ & \square\square\square \\ \hline & 2022 \end{array}$$

Qual dígito não foi utilizado? É possível preencher as caixas de modo que o dígito que fique sem ser usado seja outro?

PROBLEMA 4

Ana e Bruno têm um tabuleiro quadriculado 8×8. Ana pinta cada uma das 64 casas com alguma cor. Em seguida, Bruno escolhe duas linhas e duas colunas no tabuleiro e olha para os 4 quadrados onde elas se cruzam. O objetivo de Bruno é que esses 4 quadrados sejam da mesma cor. Quantas cores, no mínimo, Ana deve usar para que Bruno não consiga cumprir seu objetivo? Mostre como você pode pintar o tabuleiro com essa quantidade de cores e explique por que se você usar menos cores então Bruno sempre poderá cumprir seu objetivo.

PROBLEMA 5

Vero tinha um triângulo isósceles feito de papel. Usando uma tesoura, ele o dividiu em três triângulos menores e pintou-os de azul, vermelho e verde. Feito isso, observou que:

- com o triângulo azul e o triângulo vermelho pode-se formar um triângulo isósceles;
- com o triângulo azul e o triângulo verde pode-se formar um triângulo isósceles;
- com o triângulo vermelho e o triângulo verde pode-se formar um triângulo isósceles.

Mostre como era o triângulo de Vero e como ele pode ter feito os cortes para que esta situação seja possível.

XXVIII^{a} OLIMPÍADA de MAIO
Segundo Nível
Maio de 2022

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não é permitido o uso de calculadoras; não é permitido consultar livros ou anotações.
Justifique cada uma das suas respostas.
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 30 de maio.

PROBLEMA 1
Em um tabuleiro 7×7, algumas casas estão pintadas de vermelho. Seja a o número de linhas que têm um número ímpar de casas vermelhas e seja b a quantidade de colunas que possuem um número ímpar de casas vermelhos. Determine todos os valores possíveis de $a + b$. Para cada valor encontrado, dê um exemplo de como o tabuleiro pode ser pintado.

PROBLEMA 2
Há nove cartões que têm os dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9 escritos neles, sendo um dígito em cada cartão. Usando todos os cartões, alguns números são formados (por exemplo, os números 8, 213, 94, 65 e 7).
a) Se todos os números formados são primos, determine o menor valor possível de sua soma.
b) Se todos os números formados são compostos, determine o menor valor possível de sua soma.

Nota: Um número p é primo se seus únicos divisores são *1* e p. Um número é composto se tiver mais de dois divisores. O número 1 não é primo e nem composto.

PROBLEMA 3
Seja $ABCD$ um quadrado, E um ponto do lado CD e F um ponto no interior do quadrado de tal modo que o triângulo BFE é isósceles e $BFE = 90°$. Se $DF = DE$, calcule a medida do ângulo $\angle FDE$.

PROBLEMA 4
a) Em cada vértice de um triângulo é escrito um inteiro positivo. Em seguida, em cada lado do triângulo é escrito o máximo divisor comum de seus extremos. É possível que os números escritos nos lados sejam três inteiros consecutivos, em alguma ordem?
b) Em cada vértice de um tetraedro é escrito um inteiro positivo. Em seguida, em cada aresta do tetraedro é escrito o máximo divisor comum de seus extremos. É possível que os números escritos no arestas sejam seis inteiros consecutivos, em alguma ordem?

PROBLEMA 5
Os vértices de um polígono regular com N lados estão marcados no quadro-negro. Ana e Beto jogam alternadamente, Ana começa. Cada jogador, na sua vez, deve fazer o seguinte:
• unir dois vértices com um segmento, sem cortar outro segmento já marcado; ou
• apagar um vértice que não pertence a nenhum segmento marcado.
O jogador que não puder realizar nenhuma ação na sua vez perde o jogo. Determine qual dos dois jogadores pode garantir a vitória:
a) se $N = 28$;
b) se $N = 29$.