

Geometria Combinatória

Bernardo P. Trevizan

19 de julho de 2022

1. (OBM 2018) Dizemos que um polígono P está inscrito em outro polígono Q quando todos os vértices de P pertencem ao perímetro de Q . Também dizemos nesse caso que Q é circunscrito a P . Dado um triângulo T , sejam l o valor máximo do lado de um quadrado inscrito em T e L o valor mínimo do lado de um quadrado circunscrito a T . Prove que para todo triângulo T vale a desigualdade $L/l \geq 2$ e ache todos os triângulos T para os quais ocorre a igualdade.
2. (IGO 2018) É dado um poliedro cujo todas suas faces são triângulos. Seja P um ponto arbitrário numa aresta desse poliedro de modo que P não é o ponto médio nem um extremo dessa aresta. Assuma que $P_0 = P$. Em cada passo, conecte P_i ao baricentro de uma das faces contendo esse ponto. Essa reta encontra o perímetro dessa face novamente no ponto P_{i+1} . Repita o processo com o ponto P_{i+1} e a outra face contendo P_{i+1} . Prove que nem todas as faces serão utilizadas nesse processo.
3. (IGO 2017) São dados n pontos no plano ($n > 2$), sem três colineares. São traçadas as $\binom{n}{2}$ retas passando por cada par deles. Para cada reta, é marcado o ponto mais próximo a ela que não está sobre a mesma (é dado que existe um único ponto satisfazendo essa condição). Para cada n , qual o maior número possível de pontos marcados?
4. (IGO 2021) São dados 2021 pontos no plano em posição convexa, sem três colineares nem quatro concíclicos. Prove que existem dois desses pontos de modo que qualquer circunferência passando por ambos contém pelo menos 673 dos outros pontos no seu interior.
(Um conjunto finito de pontos no plano está em posição convexa se os pontos são os vértices de um polígono convexo.)
5. (IGO 2018) Ache todos os inteiros positivos $n > 3$ tal que exista um n -ágono para o qual cada diagonal é a mediatriz de ao menos uma outra diagonal.
6. (IGO 2019) É verdade que, em qualquer n -ágono convexo com $n > 3$, existe um vértice e uma diagonal passando por esse vértice de modo que os dois ângulos dessa diagonal com os dois lados adjacentes a esse vértice são agudos?
7. (IGO 2017) São dados 6 discos disjuntos de raio pelo menos 1 no plano. Se existe um outro disco intersectando esses 6, mostre que seu raio é pelo menos 1.
8. (IGO 2015)
 - (a) Existem 5 círculos no plano de modo que cada um deles passa por exatamente 3 dos centros desses círculos?
 - (b) Existem 6 círculos no plano de modo que cada um deles passa por exatamente 3 dos centros desses círculos?
9. (IGO 2016) Ache todos os inteiros positivos N de modo que existe um triângulo que pode ser dividido em N quadriláteros semelhantes.
10. (IGO 2020) São dados três discos disjuntos de modo que toda reta que separe dois deles intersecta o terceiro. Prove que a soma das três distâncias entre seus centros é, no máximo, $2\sqrt{2}$ vezes a soma dos três raios.
11. (OBM 2018) Considere $4n$ pontos no plano, sem três colineares. Utilizando esses pontos como vértices, podemos formar $\binom{4n}{3}$ triângulos. Mostre que existe um ponto X do plano que pertence ao interior de pelo menos $2n^3$ desses triângulos.