Out of the Abstract Algebra
Além dos Rudimentos de Análise

Pedro de Oliveira Lengruber Lack
Vinícius Barbosa Alvarez

Pouco a pouco, com a evolução dos alunos, muitas barreiras em olimpíadas são quebradas, e competições, originalmente com conteúdos restritos para aqueles de ensino médio, paulatinamente abarcam novas matérias. No ano passado, o problema 2 da IMO quebrou, de uma vez por todas, o paradigma que não é necessário saber análise para participar de olimpíadas de matemática em nível internacional. Precisamos estar preparados para um futuro em que ideias de análise não virão mais disfarçadas de teses de matemática elementar com ϵ sendo um número pequeno e N um número grande, mas com notações de limites, derivadas e integrais. Parte do medo dos alunos de lidar com isso é a necessidade de certo rigor formal, sobre o qual muitos passam por cima. Só é possível derivar funções deriváveis! Nem todo conjunto de reais possui um mínimo, nem todo limite existe, nem toda função possui um máximo... Talvez, a única solução para concertar tal problema seja tentando e errando como os matemáticos que definiram esses importantes conceitos (vocês terão muitas oportunidades nesse artigo). Talvez, entendendo a experiência dos países que obtiveram algum sucesso no 2 da IMO do ano passado (2021), através de seus problemas recentes, consigamos melhorar nossa habilidade analítica (os problemas não são muito fáceis, logo não se decepcionem se não conseguirem fazê-los).

1 Um Início

1.1. Como maximizar funções de uma variável. Um teorema importante em cálculo consiste em caracterizar os possíveis pontos de máximo/mínimo de uma função contínua e derivável em quase todo ponto. Quando uma função é derivável, o sinal positivo de sua derivada denota comportamento crescente, enquanto o sinal negativo denota comportamento decrescente. Assim, ao menos intuitivamente, a derivada dar 0 indica que a função não está nem crescendo nem decrescendo, isto é, ela está em um máximo/mínimo local. O teorema diz que em um intervalo, o ponto máximo/mínimo da função pertence ao conjunto dos pontos extremos de tal intervalo, dos pontos em que a derivada não existe ou que a derivada é nula.

Exemplo 1.1. Hong Kong TST 2019 - Test 1 P1

Seja a um número real. Suponha que a função

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-6}$$

definida no intervalo $3 < x < 5$ possui seu máximo em $x = 4$. Ache o valor de a.

Solução. Pelo teorema mencionado acima, como

$$f'(x) = -\frac{a}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-6)^2}$$

existe para todo $x \in (3,5)$ e $4 \neq 3,5$, sabemos que $f'(4) = 0$ e $a = -\frac{9}{2}$.

Exercício 1.2. China, Segunda Rodada 2018 - P1
Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = ax + b + \frac{9}{x}.$$

Prove que existe $x_0 \in [1,9]$ satisfazendo que $|f(x_0)| \geq 2$.

Exercício 1.3. Vietnã 2018 - dia 1 P4
No plano cartesiano, a curva (C) possui a equação $x^2 = y^3$. Uma linha d varia no plano tal que d sempre corta C em três pontos distintos nas coordenadas x_1, x_2 e x_3.

a. *Prove que a seguinte quantidade é constante:*

$$\sqrt[3]{\frac{x_1x_2}{x_3^2}} + \sqrt[3]{\frac{x_2x_3}{x_1^2}} + \sqrt[3]{\frac{x_3x_1}{x_2^2}}.$$

b. *Prove a seguinte desigualdade:*

$$\sqrt[3]{\frac{x_1^2}{x_2x_3}} + \sqrt[3]{\frac{x_2^2}{x_3x_1}} + \sqrt[3]{\frac{x_3^2}{x_1x_2}} < -\frac{15}{4}$$

1.2. Novas ferramentas essenciais. Parte de aprender a lidar com o mundo contínuo é aprender a lidar com uma nova linguagem. Em particular, precisamos entender que muitos conjuntos ou funções não são tão “bonitos” como esperávamos. Um conjunto como, por exemplo, $\{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ não possui um mínimo, mas apenas um ínfimo, o maior número menor do que qualquer termo da sequência acima (que, nesse caso, podemos mostrar facilmente ser 0).

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ela não possui limite tendendo a nenhum ponto, não é contínua, não é derivável, mas é integrável. Nesse caso, devemos nos atentar às definições mais elementares de limite, dar uma cota para quão perto um valor deve estar de x para que sua função esteja em certa proximidade de $f(x)$. Caso uma função arbitrária seja dada (sem a menção de que ela é um polinômio ou uma exponencial), devemos provar que considerar certas propriedades analíticas faz sentido.

Exemplo 1.4. Brasil 2021 - P4
Um conjunto X de números reais, infinito ou não, é limitado quando existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < M$ para todo $x \in X$. Por exemplo, $A = [-3, \pi)$ e $B = \{2^{-k} \mid k \in \mathbb{Z}_{>0}\} = \{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; ...\}$ são limitados (tome $M \geq \pi$ e $M \geq 1$, respectivamente). Por outro lado, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$ não são limitados. Um conjunto A de números reais é enquadrado quando é limitado e, para todos $a, b \in A$, não necessariamente distintos, $(a-b)^2 \in A$. Qual é o menor número real que pertence a algum conjunto enquadrado?

Solução. Chamemos o conjunto quadrado de A. Claramente, para $a = b$ (afinal, o conjunto possui algum elemento), obtemos que 0 pertence ao conjunto. Denote $I = \inf A$ e $S = \sup A$ (menores que infinito, pois a sequência é limitada). Podemos supor, como $0 \in A$, que I é negativo e S é positivo. Sabemos que $(S - I)^2 \leq S$, pois, caso o contrário, poderíamos tomar $a, b \in A$ arbitrariamente próximos de S e I, respectivamente e obter um absurdo. Assim, $S - \sqrt{S} \leq I$ (dados os sinais dos números) e, como S é positivo, o valor mínimo do lado esquerdo é $-\frac{1}{4}$ (vértice da parábola). Assim, o menor elemento de um conjunto enquadrado é maior ou igual a $-\frac{1}{4}$. Como $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ é enquadrado, (a maior diferença em módulo é um meio), $-\frac{1}{4}$ é o número desejado.

Muitos alunos foram severamente penalizados nesse problema, pois ao invés de argumentarem com ínfimos e supremos utilizaram máximos e mínimos, números não necessariamente existentes. Por isso, precisamos prestar atenção nos detalhes técnicos para não termos nossas soluções anuladas.

Seguem abaixo alguns problemas nos quais será necessário usar a linguagem analítica. Muitos entre eles, oriundos da olimpíada vietnamita, servem principalmente para se atentar aos detalhes técnicos da área.

Exercício 1.5. Seja (x_n) uma sequência definida por $x_1 \in (0, \frac{1}{2})$ e $x_{n+1} = 3x_n^2 - 2nx_n^3$ para todo $n \geq 1$.

a. Prove que (x_n) converge para 0.

b. Para cada $n \geq 1$, seja $y_n = x_1 + 2x_2 + ... + nx_n$. Prove que (y_n) possui um limite.

Dica: Ache os intervalos aos quais cada x_n pertence e conclua o primeiro item, então use o critério da razão para concluir o problema.

Exercício 1.6. Vietnã 2019 - P1
Seja $f\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ uma função contínua tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

a. Prove que $f(x)$ possui um valor máximo em $\mathbb{R}$.

b. Prove que existem duas sequências (x_n) e (y_n) com $x_n < y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ tais que elas possuam o mesmo limite quando n tende ao infinito e $f(x_n) = f(y_n)$ para todo n.

Dicas: Para o primeiro item, observe que para um intervalo suficientemente grande, o seu complemento em relação aos reais, possui números tão pequenos quanto desejarmos. Então use o teorema do valor extremo em um compacto. Depois, lembre que toda sequência limitada possui uma subsequência convergente e termine.

Exercício 1.7. Romênia TST - 2019
Seja $n \geq 3$ um número natural. Ache

$$\inf_{x_1,\ldots,x_n \,\in\, \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_i} - x_i\right),$$

com $1 = P(x_1, x_2, ..., x_n) := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i + n - 1}$ *e ache as circunstâncias na qual tal ínfimo é atingido.*

Dica: Troque a variável $y_i = \frac{1}{x_i+n-1}$ e analise a convexidade da função resultante, deduzindo o mínimo.

Exercício 1.8. Brasil 2020 - P6
Sejam $f(x) = 2x^2 - x - 1$, $f^0(x) = x$ e $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \geq 0$ inteiro (ou seja, $f^n(x)$ é a n-ésima iteração de f)

a. *Determine o número de soluções reais distintas da equação $f^3(x) = x$.*

b. *Determine, para cada $n \geq 0$ inteiro, o número de soluções reais distintas da equação $f^n(x) = 0$.*

Dicas: No primeiro item, use as soluções da primeira iterada, abra o resultado e derive, em busca de raízes duplas. Já no segundo, divida os reais nos intervalos entre as raízes do polinômio e 0 e entenda o que acontece ao aplicar a função em cada ponto

1.3. Olhando para o gráfico, Explorando limites, suficientemente grande, suficientemente pequeno. Uma das grandes vantagens da análise é conseguir olhar muito para frente ou muito para trás. Nesse caso, é importante entender variáveis que são fixas ao olhar muito para frente. Se temos $c > 0$ uma constante, tal que c é menor do que $\frac{1}{x}$, então temos um absurdo. Caso c seja uma função, isso é obviamente possível. Nessa seção, teremos a chance de dar zoom ins ou zoom outs muito grandes para acharmos exatamente onde devemos analisar o comportamento de uma sequência ou função.

Exemplo 1.9. HKTST1 2017 - P6
Dadas sequências infinitas $a_1, a_2,\ a_3, \ldots$ e $b_1, b_2,\ b_3, \ldots$ de números reais que satisfazem $a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ e $a_{n+1}\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ para todo $n \geq 1$. Suponha que $b_{2016} = 1$ e $a_1 > 0$. Ache todos os possíveis valores de a_1.

Solução. Observe que devemos nos empenhar em descobrir os possíveis valores de a_{2016}, pois é o único n para o qual sabemos uma das variáveis e podemos facilmente retornar a a_1 dado seu valor. Obviamente, pela definição de $a_{n+1}\ b_{n+1}$, esse valor é não negativo. Então $a_{2016} \geq 0$. Além disso, observe que intuitivamente, os valores de a_n e b_n estão diminuindo, o que nos leva a crer que, eventualmente, devemos atingir 0. Provemos nossa intuição, note que começando com a_{n+k} e b_{n+k}, sabemos (MA-MG) que

$$(a_{n+k} + b_{n+k}\ )^2 \geq 4a_{n+k}\ b_{n+k} \Leftrightarrow (\frac{a_{n+k-1} + b_{n+k-1}}{2})^4 \geq 16a_{n+k-1}\ b_{n+k-1}.$$

Então,

$$(\frac{a_{n+k-2} + b_{n+k-2}}{4})^4 \geq 16\sqrt{a_{n+k-1} + b_{n+k-1}}\ ,$$

o que indutivamente mostra que $(\frac{a_n+b_n}{2^k})^{2^{k+1}} \geq 16^{2^{k-1}} a_n b_n$ Para k e n arbitrários. Tomando $n = 2016$, temos que

$$\frac{(\frac{a_{2016+1}}{2^k})^{2^{k+1}}}{16^{2^{k-1}}} \geq a_{2016}.$$

Mas tomando o limite de k indo para infinito teremos que a_{2016} é menor ou igual a 0, logo, como foi provado que $a_{2016} \geq 0$, $a_{2016} = 0$. Assim, é fácil perceber que para todo n, $a_n\ b_n = 0$, logo $b_1 = 0$, usando a propriedade da soma 2016 vezes, temos que $a_1 + b_1 = 2^{2015}$, implicando que $a_1 = 2^{2015}$.

Exemplo 1.10. ChinaTST 2017 - TST 5 P2
Ache o menor número positivo m tal que para qualquer polinômio $f(x)$ com coeficientes reais, existe um polinômio $g(x)$ com coeficientes reais (e grau menor do que m) tais que existem 2017 números distintos $a_1, a_2, \ldots,\ a_{2017}$ tais que $g(a_i\ ) = f(a_{i+1})$ para $i = 1, 2, \ldots, 2017$ com índices tomados módulo 2017.

Solução. Obviamente, $m = 1$ não funciona até no caso mais básico, $f(x) = x$. Se g for crescente ou decrescente, teremos $a_1 < a_2 < \ldots\ < a_{2017} < a_1$, um absurdo (o que análogo, para g decrescente trocando a ordem). Se g for a identidade, os termos da sequência não são distintos. Se tentarmos resolver para $f(x) = x$, podemos tomar $g(x) = x^2 - 2$, pois podemos tomar uma solução de $g^{2017}\ (x) = x$, diferente de -1 e 2, existente pois representando $x = z+\frac{1}{z}$, devemos achar uma solução de $z^{2^{3034}} - z^{2^{2018}} - z^{2^{2017}} + 1 = 0$ diferente de 1 (observe que -1 não possui representação com z real), a qual existe pois, a reta cruza o eixo x em 1 e não é tangente pois a derivada da função em 1 não é 0. Assim, concluímos que, neste caso $m = 2$.

Enquanto poderia parecer lógico para alguns que m deve aumentar com o grau de f, pelo enunciado do problema isso não pode ser verdade. Ademais, para x suficientemente grande o gráfico de $f(x)$ é apenas uma curva crescente, a qual se parece muito com o gráfico de $f(x) = x$ (apesar de crescer bem mais). Então, podemos pegar x suficientemente grande e tentarmos fazer da mesma forma.

Formalizando, tome M suficientemente grande de tal modo que ele seja 10^{10} vezes maior do que o último zero de qualquer derivada de f e que para $x > M$, a função seja estritamente crescente (ou estritamente decrescente, pois ambos os casos são completamente análogos). Então escolha números $x_1 <\ \ x_2$ maiores do que $10^{10}\ M$. Observe que podemos escolher g passando pelos pontos $(x_1, f(x_1\ ))$ e $(x_2, f(x_2\ ))$ e tal que para $r = \frac{x_1+2x_2}{3}$ (valor no intervalo $(x_1, x_2\ ))$ com $g(r) > g(x_2\ ) > g(x_1\ ) > gf^{-1}\ g(r)$ com esse último termo denotando aplicar g ao único valor maior que x_1 tal que f aplicado a ele resulta em $g(r)$ (o valor é único porque a função é crescente e é maior do que x_1, pois $g(r) > g(x_2\ ))$. Podemos realizar tal escolha de g pois tomando o seu coeficiente líder indo para $-\infty$ teremos seu vértice com coordenada y arbitrariamente grande. Agora, repetindo o argumento acima, tomemos $r_0 = r$ e r_i o único número tal que $g(r_i\ ) = f(r_{i-1})$, uma sequência decrescente e limitada por x_1. Para acabar o problema, basta acharmos uma solução de $((f)^{-1}\ g)\ ^{2017}(x) = x$ (definido com acima) no intervalo $(x_1,\ x_2)$, pois podemos tomar o ciclo de $f^{-1}\ g$ nesse ponto. No entanto, note que $f^{-1}\ g$ é contínua dentro desse intervalo (talvez seja difícil de digerir, mas é apenas uma sequência de projeções de curvas contínuas...). Assim, como $(f\ ^{-1}\ g)\ ^{2017}(r_{2016}) = f^{-1}\ g(r_0\ ) > f^{-1}\ f(r_0\ ) > r_{2016}$ e $((f)^{-1}\ g)\ ^{2017}(r_{2015}) = \ \ (f\ ^{-1}\ g)\ ^2(r_0) < f^{-1}\ g(x_1\ ) = x_1 < r_{2015}$ (essa desigualdade se deve ao fato de que $g(r) > g(x_2\ ) > g(x_1\ ) > gf^{-1}\ g(r))$. Assim, pelo teorema do valor intermediário temos x tal que $(f^{-1}g)^{2017}(x) = x$ e não são pontos fixos de $f^{-1}\ g$, pois x_1 e x_2 são os únicos números que satisfazem essa condição no intervalo que olhamos.

Exercício 1.11. Brasil 2019 - P5

1. *Prove que dadas constantes a, b com $1 < a < 2 < b$ não existe partição do conjunto dos inteiros positivos em dois subconjuntos A_0, A_1 tal que: se $j \in 0, 1$ e m, n pertencem a A_j, então $\frac{n}{m} < a$ ou $\frac{n}{m} > b$.*

2. *Determine todos os pares de reais (a, b) com $1 < a < 2 < b$ para os quais vale a seguinte propriedade: existe uma partição do conjunto dos inteiros positivos em três*

subconjuntos A_0, A_1, A_2 tal que se $j \in 0, 1, 2$ e m, n pertencem a A_j , então $\frac{n}{m} < a$ ou $\frac{n}{m} > b$.

Exercício 1.12. USATST 2020 - P1 *Escolha inteiros positivos $b_1, b_2, \ldots$ satisfazendo:*

$$1 = \frac{b_1}{1^2} > \frac{b_2}{2^2} > \frac{b_3}{3^2} > \frac{b_4}{4^2} > \ldots$$

e seja r o maior número real satisfazendo $\frac{b_n}{n^2} \geq r$ para todos os inteiros positivos n. Quais são os possíveis valores de r, considerando todas as possíveis escolhas para a sequência (b_n)?

Exercício 1.13. ChinaTST 2019 - Teste 4 P5
Ache todos os inteiros n tais que as seguintes propriedades são satisfeitas: Para quaisquer números a, b, c, x, y, z com $\max(a, b, c, x, y, z) = a$, $a + b + c = x + y + z$, $abc = xyz$ e a desigualdade

$$a^n + b^n + c^n \geq x^n + y^n + z^n$$

é satisfeita.

2 Desigualdades

2.1. Desigualdades: O Outro Lado! Umas das primeiras dificuldades em desigualdades olímpicas é tentar entender o caso de igualdade: o que geralmente consiste em juntar os pontos ou afastá-los. Descobrir tal caso de igualdade, mesmo quando não nos é pedido, pode, portanto, ser interessante para entendermos quais tipos de desigualdades podemos usar (não juntar pontos quando devemos afastá-los ou juntá-los mais do que no caso de igualdade). Muitas vezes, os valores que analiticamente resultam no caso de igualdade não podem ser substituídos, seja por dividirmos por 0, termos uma variável infinita ou outros empecilhos matemáticos. Quando nos é pedida a menor/maior constante tal que certa desigualdade seja válida, isso pode resultar em problemas. Nesses casos, tomar o limite de variáveis indo para certo ponto, além de ser uma necessidade lógica, é uma necessidade para entender a desigualdade em tal ponto.

Exemplo 2.1. IZHO 2019 - P2
Ache a maior constante real C tal que para toda 2019-upla de reais positivos $(a_1, a_2, ...a_{2019})$, a seguinte desigualdade é satisfeita:

$$\frac{a_1}{|a_2 - a_3|} + \frac{a_2}{|a_3 - a_4|} + \frac{a_{2019}}{|a_1 - a_2|} > C$$

Solução. Inicialmente, ao realizar casos pequenos, podemos desconfiar que $C = 1010$. Idealmente, gostaríamos de que $a_i - a_{i+1} = 1$, com $a_{2i} = 0$ e $a_{2i+1} = 1$, mas isso é impossível, pois as variáveis são distintas e positivas. Portanto, tomamos $a_{2i} = i\epsilon$ e $a_{2i+1} = 1 + i\epsilon$, exceto para $a_{2019} = 1$ e $a_{2018} = \epsilon^2$, tornando a soma total igual a

$$1009 + 1008\epsilon + \frac{1008\epsilon}{1 + 1009\epsilon - \epsilon^2} + \frac{1 + 1009\epsilon}{1 - \epsilon^2}$$

cujo limite para $\epsilon \to 0$ é igual a 1010, como desejado. Logo, $C \leq 1010$, pois se C é maior do que tal número, nós conseguimos ϵ suficientemente pequeno tal que a expressão desejada seja menor do que C. Basta, portanto, provar que

$$\sum_{i=1}^{2019} \frac{a_i}{|a_{i+1}-a_{i+2}|} > 1010$$

(índices tomados módulo 2019). Suponha, sem perda de generalidade, que a_1 é o menor entre os a_is. Se b e c são reais positivos, então $\frac{a}{|b-c|} \geq \min(\frac{a}{b}, \frac{a}{c})$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{2019} \frac{a_i}{|a_{i+1}-a_{i+2}|} > 0 + \min(\frac{a_1}{a_3}, \frac{a_2}{a_4}) + ... + \min(\frac{a_{2017}}{a_{2018}}, \frac{a_{2017}}{a_{2019}}) + \frac{a_{2018}}{a_{2019}} + \frac{a_{2019}}{a_2} = T. \quad (1)$$

Agora, observe que podemos reindexar as variáves a_i de tal maneira que $i_0 = 2$ e definimos recursivamente i_{k+1} como $i_k + 1$, se $a_{1+i_k} > a_{2+i_k}$ ou como $i_k + 2$, caso o contrário (para não precisarmos lidar com os mínimos). Observe que, de tal modo, existe $i_j < 2018$ e com $i_{j+1} \geq 2018$. Então,

$$T \geq \frac{a_2}{a_{i_1}} + \frac{a_{i_1}}{a_{i_2}} + ... + \frac{a_{i_j}}{a_{i_{j+1}}} + \frac{a_{2018}}{a_{2019}} + \frac{a_{2019}}{a_2}, \quad (2)$$

Com $1 \leq i_{k+1} - i_k \leq 2$ e $i_{j+1} \in \{2018, 2019\}$. Assim, $2018 \leq i_{j+1} = i_0 + (i_1 - i_0) + ... + i_{j+1} - i_j \leq 2(j+2)$, de onde segue que $j \geq 1007$. Assim, consideramos dois casos:

i. Se $j = 1007$, as desigualdades em (2) tornam-se igualdades e $i_{j+1} = 2018$ e aplicando MA-MG em (1), temos que $S > T \geq A \geq j + 3 \geq 1010$.

ii. Se $j > 1007$, caso $i_{j+1} = 2018$, procedemos com o caso anterior. Se $i_{j+1} = 2019$, aplicamos MA-MG em todos os termos de (1), exceto $\frac{a_{2018}}{a_{2019}}$, logo $S > T \geq A \geq j + 2 \geq 1010$.

Assim, tem-se que $C \geq 1010$ como desejado.

Exemplo 2.2. IMOSL 2020 - A1 *Seja n um inteiro positivo e $N = 2^n$. Determine o menor real a_n tal que, para todo número real x,*

$$c \leq a_n(x-1)^2 + x.$$

Solução. Podemos reescrever o problema como achar a menor constante a_n tal que

$$\frac{\sqrt[N]{\frac{x^{2N}+1}{2}} - x}{(x-1)^2} \leq a_n,$$

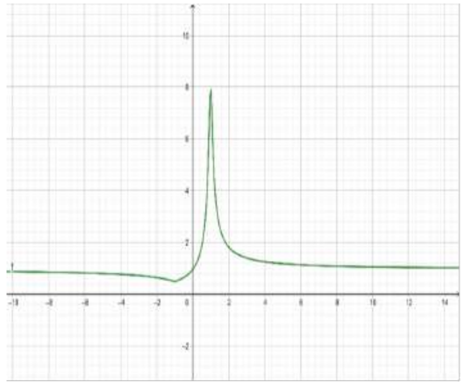
ou seja, devemos achar o máximo da função

$$f(x) = \frac{\sqrt[N]{\frac{x^{2N}+1}{2}} - x}{(x-1)^2}.$$

Não é difícil entender que o numerador e o denominador possuem o mesmo grau, logo o comportamento assimptótico é

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1.$$

Figura 1: Gráfico para N = 16.



Logo, devemos analisar o comportamento da função no ponto em que ela pode possivelmente crescer abruptamente (quando o denominador tende a 0). Primeiro, analisemos $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. Pela regra de L'Hôpital (pois se substituirmos $x = 1$, teremos o numerador e o denominador nulos),

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^{2N-1}(\frac{x^{2N}+1}{2})^{\frac{1}{N}-1} - 1}{2(x-1)},$$

o que resulta em numerador e denominadores nulos ao substituir x por 1. Portanto, aplicamos L'Hôpital novamente para ter que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(2N-1)x^{2N-2}(\frac{x^{2N}+1}{2})^{\frac{1}{N}-2} + (N-1)x^{4N-2}(\frac{x^{2N}+1}{2})^{\frac{1}{N}-1}}{2} = \frac{N}{2}.$$

Agora, basta provar que

$$\sqrt[N]{\frac{x^{2N}+1}{2}} \leq \frac{N}{2}(x-1)^2 + x,$$

o que pode ser feito de várias maneiras. Segue uma delas. Observe que a desigualdade é evidente para $N = 1$. Provaremos por indução que vale para todo $N \in \mathbb{N}$. Substituindo $x \to x^{\frac{1}{2}}$ na desigualdade acima e tirando a raíz quadrada, observamos que basta provar que

$$(x + N(x-1^2))^2 \geq x^2 + \frac{N}{2}(x^2-1)^2,$$

o que é verdade, pois $(N^2 - \frac{N}{2})(x-1)^4 \geq 0$. Note que $(x + N(x-1)^2) \geq 0$, pois $N \geq \frac{1}{2}$.

Exercício 2.3. Alemanha 2018 - P4

a. *Sejam a, b e c lados de um triângulo com perímetro 4. Prove que*

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc < 8.$$

b. *Existe constante real $d < 8$ tal que, para todos os triângulos de perímetro 4, seja válido que*

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc < d?$$

Exercício 2.4. Alemanha 2021-P5

a. Determine a maior constante real A com a seguinte propriedade: para todas as triplas (x, y, z) de reais não negativos é válido que:

$$\frac{1+yz}{1+x^2}+\frac{1+xz}{1+y^2}+\frac{1+xy}{1+z^2}\geq A.$$

b. Para tal número real A, ache todas as triplas de reais não-negativos, tais que o caso de igualdade é atingido na desigualdade acima.

Exercício 2.5. Chéquia e Eslováquia 2017 - P2
Ache todos os pares de números reais (k, l), tais que $ka^2 + lb^2 > c^2$ para a, b e c lados de um triângulo qualquer.

Exercício 2.6. China 2018 TST2-dia 2 - P2
Dados inteiros positivos fixos n e k com $n \geq 4k$, determine a menor constante real $\lambda = \lambda(n, k)$ de tal modo que para todas as n-uplas de reais positivos $(a_1, a_{2,\dots}, a_n)$, com índices tomados módulo n, vale a seguinte desigualdade:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt{a_i^2+a_{i+1}^2+\ldots+a_{i+k}^2}}\leq\lambda$$

2.2. Jensen, uma desigualdade que você não cansa de derivar. Como dito anteriormente, muitas vezes devemos entender como as variáveis se comportam no caso de igualdade para entender que tipo de desigualdade aplicar. Uma técnica muito comum consiste em reduzir a desigualdade para uma variável (Seja introduzindo tal variável [como parâmetro somado, multiplicado... às outras variáveis], seja olhando para cada variável individualmente e tratando as outras como constantes), e analisando se a função que descreve o comportamento dessa variável na desigualdade possui a concavidade para cima ou para baixo. No primeiro caso, normalmente, deve-se separar as variáveis, enquanto, no segundo, deve-se juntá-las.

Exemplo 2.7. Alemanha 2020 - P5
Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{22}$ inteiros positivos com soma 59. Prove a desigualdade

$$\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{a_2+1}+\ldots+\frac{a_{22}}{a_{22}+1}<16.$$

Solução. Observe que estamos somando $f(x) = \frac{x}{x+1}$ para todos os a_is, então precisamos entender o comportamento de tal função. Tomando a segunda derivada de $f(x)$ que vale $\frac{-2}{(x+1)^3}$, podemos notar que a concavidade é para baixo e, logo, devemos juntar os pontos para obter igualdade. Se aplicarmos a desigualdade de Jensen, sem nenhuma modificação, teremos que a soma acima é menor do que $16 + 2/81$, o que não é suficiente. Tentemos uma modificação, se $a_i = 1$, apliquemos Jensen nas outras variáveis e teremos que a soma total é menor do que $\frac{1}{2} + \frac{58\times21}{79} < 16$, como desejado, suponha agora que $a_i = k > 3$, por Jensen, teremos por Jensen que a soma é menor do que

$$\frac{21(59-k)}{80-k}+\frac{k}{k+1}<16$$

(resolvendo a inequação do segundo grau em k, que funciona para

$$k>\frac{17+\sqrt{43}}{6}.$$

Assim, basta analisar $a_i = 2$ ou 3. Tendo j dentre eles iguais a 2 e os outros iguais a 3, o que para satisfazer a soma 59, $j = 7$, o que resulta em uma soma de 191/12, menor do que 16. Uma outra solução para esse problema pode ser feita por smoothing, mostrando que se existe uma variável que possui uma distância maior do que 1 de outra, podemos subtrair 1 da menor e somar 1 a maior, sobrando apenas o último caso, como acima, a ser analisado).

Exemplo 2.8. Israel 2021 TST2 - P2
Suponha que $x, y, z \in \mathbb{R}^+$. Prove que

$$\frac{x}{\sqrt{yz + 4xy + 4xz}} + \frac{y}{\sqrt{xz + 4yz + 4yx}} + \frac{z}{\sqrt{xy + 4zx + 4zy}} \geq 1.$$

Solução. Observe que a desigualdade é homogênea de grau 0, logo podemos fixar $x+y+z = 1$, de tal modo que as variáveis nos numeradores sejam pesos para uma desigualdade. Então, basta entendermos o comportamento de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Uma função que possui concavidade para cima, pois sua segunda derivada ($\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$) é positiva em $\mathbb{R}^+$. Usando Jensen com pesos x, y, z e a função $f(x)$, obtemos

$$\frac{x}{\sqrt{yz + 4xy + 4xz}} + \frac{y}{\sqrt{xz + 4yz + 4yx}} + \frac{z}{\sqrt{xy + 4zx + 4zy}} \geq$$

$$\frac{1}{\sqrt{4\left(x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y)\right) + 3xyz}}.$$

Então, basta provarmos que: $4\left(x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y)\right) + 3xyz \leq 1$. Como somos bons apenas em desigualdades homogêneas polinomiais, $4(x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y)) + 3xyz \leq (x+y+z)^3$. O que é a desigualdade de Schur para 3 variáveis.

Exercício 2.9. IMOSL 2016 - A1
Sejam a,b,c números reais positivos tais que $min(ab, bc, ac) \geq 1$. Prove que

$$\sqrt[3]{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 + 1.$$

Exercício 2.10. IMO 2021 - P2
Mostre que a desigualdade

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}.$$

é satisfeita por quaisquer números reais $x_1, \ldots, x_n$

Exercício 2.11. IMO 2020 - P2
Os números reais a, b, c, d são tais que $a \geq b \geq c \geq d > 0$ e $a + b + c + d = 1$. Prove que

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a b^b c^c d^d < 1.$$

2.3. Truque da curva tangente! Comumente, problemas de desigualdade consistem em estimar certos $\sum_{Sym} f(x, y, z)$, o que pode ser reduzido a estimar $g(x)$ para certa função g. Um dos métodos para estimar tal função consiste em três passos. 1 Achar o caso de igualdade da sua desigualdade 2. Achar uma curva (geralmente, uma reta) tangente ao gráfico de g nos pontos de igualdade 3. Provar que em todo o domínio da função a desigualdade vale, concluindo o problema.

Exemplo 2.12. Hong Kong TST1 2019 - P6
Se $57a + 88b + 125c \geq 1148$*, com* $a, b,\ c > 0$*, qual é o valor mínimo de* $a^3 + b^3 + c^3 + 5a^2 + 5b^2 + 5c^2$*?*

Solução. A primeira parte da solução consiste em tentar adivinhar as respostas... (apesar de nós também podermos abordar esse problema com Multiplicadores de Lagrange, assunto abordado em uma outra seção). Podemos observar que a função $f(x) = x^3 + 5x^2$ é crescente em $x > 0$ (coeficientes positivos) e que sua concavidade é para cima (derivando duas vezes e observando que os coeficientes são positivos), logo, parece apropriado não concentrar a massa em nenhuma das variáveis. Além disso, queremos que os coeficientes das retas tangentes sejam 57, 88 e 125, o que nos leva a resolver as equações $3x^2 + 10x = 57, 88, 125$. (Obtendo como resultados 3,4 e 5), o que desconfiamos ser o trio mínimo. Aplicando o truque da reta tangente, obtemos que: $f(x) \geq 57x - 99$ (reta tangente em $x \geq 3$) (dada sua convexidade ou fatorando como $(x-3)^2(x+11) \geq 0)f(x) \geq 88x - 208((x-4)^2(x+13) \geq 0)$ e $f(x) \geq 125x - 375((x-5)^2(x+15) \geq 0)$. Somando $f(a) + f(b) + f(c) \geq 57a - 99 + 88b - 208 + 125c - 375 \geq 466$. Logo, o mínimo é 466 atingido em (3,4,5).

Exercício 2.13. USAMO 2017 - P6
Ache o menor valor possível de

$$\frac{a}{b^3+4} + \frac{b}{c^3+4} + \frac{c}{d^3+4} + \frac{d}{a^3+4}$$

Dado que a,b,c,d são números reais não-negativos e que $a + b + c + d = 4$*.*

Exercício 2.14. Rússia 2018 - 11.7
Dada uma sequência de inteiros positivos $a_1, a_2, a_3 \ldots$ *definida por* $a_n = \left\lfloor n^{\frac{2018}{2017}} \right\rfloor$*. Mostre que existe um inteiro positivo N, tal que entre quaisquer N termos consecutivos da sequência, existe um termo cuja representação decimal termina com 5.*

Exercício 2.15. Filipinas 2022 - P7
Sejam a,b e c reais positivos tais que $ab + bc + ca = 3$*. Mostre que*

$$\frac{bc}{1+a^4} + \frac{ca}{1+b^4} + \frac{ab}{1+c^4} \geq \frac{3}{2}$$

2.4. Múltiplos de Lagrange. O método mais direto e, talvez, o mais trabalhoso e técnico para conseguir desigualdades seja utilizar os multiplicadores de Lagrange. Enquanto, as novas desigualdades tentam evitar a aplicabilidade desse método, é importante tê-lo guardado no bolso, pois junto com outras técnicas pode resolver problemas, bem como possibilitar maior agilidade em um problema no qual a técnica encaixe. Outro problema comum durante a utilização desse método é esquecer os formalismos necessários para que o teorema seja válido. Ou seja, não podemos esquecer de prender as variáveis em um compacto para podermos utilizar o Teorema de Weierstrass e encontrar o máximo, além de testar a borda do compacto e os pontos em que o gradiente da condição é igual a 0.

Exemplo 2.16. China TST 2017 - TST4 P5
Dado um inteiro $m \geq 2$*,* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *são números reais não-negativos, prove que:*

$$(m-1)^{m-1}(x_1^m + x_2^m + \ldots + x_m^m) \geq (x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^m - m^m x_1 x_2 \ldots\ x_m$$

E ache os casos de igualdade.

Solução. Observe que como as variáveis são reais positivos arbitrários, a priori, não podemos aplicar multiplicadores de Lagrange, pois elas não estão presas em um compacto. No entanto, observe que, como a desigualdade é homogênea, podemos supor, sem perda de generalidade que $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$. Desse modo, podemos prender a m-upla das variáveis no compacto $U = [0,1]^m$. Desse modo, queremos minimizar a função $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (m-1)^{m-1}(x_1^m + x_2^m + \ldots + x_m^m) + m^m x_1 x_2 \ldots\ x_m - 1$. Sujeito a $g(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$. Observe que o gradiente de g não é 0. Além disso, f e g são contínuas e deriváveis. Podemos começar a aplicar os multiplicadores de Lagrange.

Se um ponto está na borda do compacto, então existe um x_i igual a 0, digamos x_1. Nesse caso, basta mostrar que $(m-1)^{m-1}(x_2^m + \ldots + x_m^m) \geq (x_2 + \ldots + x_m)^m$, o que é evidente pela desigualdade da média das potências m-ésimas e média aritmética, com igualdade apenas se todas as variáveis forem iguais.

Caso o mínimo não seja atingido na borda, $\nabla f = \lambda \nabla\ g$, ou seja, para cada x_i,

$$\lambda = \frac{m^m x_1 x_2 \ldots x_m}{x_i} + m(m-1)^{m-1} x_i^{m-1}.$$

Assim, fixando $m^m x_1 x_2 \ldots\ x_m = t$ e $m(m-1)^{m-1} = r$, temos que $\lambda\ x_i = t + r x_i^m$ e logo, para quaisquer x_i e x_j,

$$\lambda = r\frac{x_i^m - x_j^m}{x_i - x_j}$$

Do mesmo modo, pelas equações acima:

$$\frac{t}{x_i x_j} = \ r\frac{x_i^{m-1} - x_j^{m-1}}{x_i - x_j} = \lambda \frac{x_i^{m-1} - x_j^{m-1}}{x_i^m - x_j^m}.$$

Assim, para x_i , x_j e x_s vale que

$$\frac{t}{\lambda} = \frac{x_i x_j (x_i^{m-1} - x_j^{m-1})}{x_i^m - x_j^m} = \frac{x_j x_s (x_j^{m-1} - x_s^{m-1})}{x_j^m - x_s^m} = \frac{x_s x_i (x_s^{m-1} - x_i^{m-1})}{x_s^m - x_i^m}$$

O que significa que $x_i x_j (x_i^{m-1} - x_j^{m-1}) +\ x_j x_s (x_j^{m-1} - x_s^{m-1}) +\ x_s x_i (x_s^{m-1} - x_i^{m-1}) = 0$, o que pela desigualdade de Schur, significa que nós apenas precisamos checar o caso em que uma variável é 0 ou que todas são iguais, o primeiro já foi trabalhado e o segundo é evidente e não há igualdade. Se $m = 2$, a equação é equivalente a $x_1 x_2 \geq 0$. Logo, há apenas igualdade quando uma variável é 0 e todas as outras são iguais.

Exercício 2.17. Coréia 2015 - P3
Reais a, b,c,x,y satisfazem $a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 = 1$. *Ache o valor máximo de*

$$(ax + by)^2 + (bx + cy)^2$$

Exercício 2.18. Russia 2016 - Dia 2 11.7
Sejam $a,\ b, c,$ *e* d *números positivos tais que* $a + b + c + d = 3$. *Prove que*

$$\frac{1}{d^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \leq \frac{1}{a^3 b^3 c^3 d^3}$$

Exercício 2.19. USATSTST 2015 - P4
Sejam x, y e z números reais (não necessariamente positivos) tais que $x^4+y^4+z^4+xyz=4$. Mostre que

$$x \leq 2 \text{ e } \sqrt{2-x} \geq \frac{y+z}{2}.$$

Exercício 2.20. APMO 2022 - P5
Sejam a, b, c, d números reais com $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Determine o menor valor de $(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)$ e determine todos os valores de (a,b,c,d) tal que o mínimo é atingido.

3 Polinômios

3.1. Polinômios: Tudo o que deriva deles! Um dos problemas do uso da matemática superior em olimpíadas é que, geralmente, temos poucas informações sobre propriedades analíticas das funções dadas, o que nos impossibilita de tirar derivadas ou tomar certos limites de funções por eles possivelmente não estarem bem definidos. Os polinômios, no entanto, são funções analíticas por definição, o que nos permite descobrir fatos (quando ela é crescente, côncava/convexa, mínimos/máximos, número e posição de raízes em certa região do plano) usando análise (principalmente, derivadas). Além disso, podemos tirar limites e usar o teorema do valor intermediário legitimamente.

Exemplo 3.1. IMOSL 2017 - A1
Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n,$ k e M inteiros positivos tais que $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}=k$ e $a_1a_2\ldots\ a_n=\ M$ Se $M>1$, prove que o polinômio

$$P(x)=M(x+1)^k-(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)$$

não possui raízes reais positivas.

Solução. Permita que k seja real e maior ou igual a $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$ e $M=1$ para podermos aplicar indução. Observe que, se $n=1$, podemos verificar que $a_1(x+1)^k-\ (x+a_1)$ é menor do que 0, o que é verdade pela desigualdade de Bernoulli (com igualdade apenas em a_1). Agora, provaremos por indução (em n) que $P(x)$ é menor ou igual a 0 para x positivo com igualdade apenas se $M=0$. Se $n\geq 2$, observe que $P(0)=0$ e que $P'(0)=\sum_{cyc}\Big(a_2a_3\ldots a_n(x+1)^{k-1}-(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)\Big)$, o que é negativo por hipótese de indução, a menos que para todos os j $a_1a_2a_3\ldots\ a_n/a_j=1$, o que implicaria que para todo j, $a_j=1$. O que implicaria que $M=1$. Desse modo, a função é decrescente para x real positivo, o que acarreta o resultado desejado.

Exemplo 3.2. USAMO 2019 - P6
Seja P um polinômio com coeficientes reais tal que a igualdade

$$\frac{P(x)}{yz}+\frac{P(y)}{xz}+\frac{P(z)}{xy}=\ P(x-y)+P(y-z)+P(z-x)$$

acontece para todos os reais não nulos, x, y e z. Econtre os polinômios tais que $2xyz=x+y+z$.

Solução. Note que podemos escrever $y = \frac{x+z}{2xz-1}$, o que nos dá liberdade nas variáveis x e z. Ademais, podemos multiplicar ambos os lados por xyz, o que resulta em:

$$xP(x) + \frac{x+z}{2xz-1}P\left(\frac{x+z}{2xz-1}\right) + zP(z) =$$

$$xz\frac{x+z}{2xz-1}\left(P\left(x - \frac{x+z}{2xz-1}\right) + P\left(\frac{x+z}{2xz-1} - z\right) + P\left(z-x\right)\right)$$

Inicialmente, observe que, como a igualdade acima é uma igualdade de funções racionais, podemos substituir as variáveis por 0, pois o limite da equação com uma variável indo para 0 é a desigualdade no ponto em que tal variável é, de fato, nula. Logo, substituindo $z = 0$, temos que P é uma função par. Note que todas as funções descritas acima são deriváveis em x, logo, derivando em x:

$$xP'\left(x\right) + P\left(x\right) + \frac{-2z^2-1}{\left(2xz-1\right)^2}P\left(\frac{x+z}{2xz-1}\right) + \frac{x+z}{2xz-1}\frac{-2z^2-1}{\left(2xz-1\right)^2}P'\left(\frac{x+z}{2xz-1}\right) =$$

$$z\left(x\frac{-2z^2-1}{\left(2xz-1\right)^2} + \frac{x+z}{2xz-1}\right)\left(P\left(x - \frac{x+z}{2xz-1}\right) + P\left(\frac{x+z}{2xz-1} - z\right) + P\left(z-x\right)\right) +$$

$$xz\frac{x+z}{2xz-1}\left(1 - \frac{-2z^2-1}{(2xz-1)^2}\right)P'\left(x - \frac{x+z}{2xz-1}\right) + \frac{-2z^2-1}{\left(2xz-1\right)^2}P'\left(\frac{x+z}{2xz-1} - z\right) - P'\left(z-x\right)$$

Como queremos uma relação apenas em uma variável, tome $x = 0$, o que resulta em $-\left(2z^2+1\right)\left(P\left(-z\right) - zP'\left(-z\right)\right) + P\left(0\right) = -z^2\left(P\left(2z\right) + 2P\left(-z\right)\right)$ Agora, note que, como P é par e sendo a o coeficiente líder de P, o coeficiente líder do lado direito é $-2a\left(degP+1\right)$ e o do lado esquerdo é $-a(2^{degP}+2)$, de onde resulta que o grau do polinômio P é 2. Pela mesma equação, obtemos que $P\left(x\right) = k\left(x^2+3\right)$, o que podemos facilmente checar que é uma família de soluções para o problema para k um real qualquer.

Exercício 3.3. Kürschák 2017 - P2
Existem polinômios $p\left(x\right)$ e $q\left(x\right)$ com coeficientes reais tais que $p^3\left(x\right) - q^2\left(x\right)$ é linear, mas não é constante?

Exercício 3.4. RMMSL 2018 - A1
Sejam m e n inteiros positivos maiores do que 2 e sejam A e B polinômios não constantes com coeficientes complexos e, ao menos um entre eles, com grau maior que 1. Prove que, se o grau do polinômio $A^m - B^n < min\left(m,n\right)$, então $A^m = B^n$.

Exercício 3.5. RMM 2018 - P2
Determine se existem polinômios $P\left(x\right)$ e $Q\left(x\right)$ com coeficientes reais satisfazendo

$$P^{10}\left(x\right) + P^9\left(x\right) = Q^{21}\left(x\right) + Q^{20}\left(x\right)$$

Exercício 3.6. USATST 2017 - P3
Sejam P, $Q \in \mathbb{R}\left[x\right]$ polinômios não-constantes e primos entre si. Mostre que existem no máximo 3 números reais λ, tais que $P + \lambda\ Q$ é o quadrado de um polinômio.

Exercício 3.7. IMOSL 2015 - A6
Seja n um inteiro fixado com $n \geq 2$. Nós dizemos que dois polinômios P e Q com coeficientes reais são bloco-semelhantes se, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, as sequências $P(2015i), P(2015i-1), \ldots, P(2015i-2014)$ e $Q\left(2015i\right), Q\left(2015i-1\right), \ldots, Q\left(2015i-2014\right)$ são permutações uma da outra.

a. Prove que existem polinômios distintos bloco-semelhantes de grau $n+1$.

b. Prove que não existem polinômios distintos bloco-semelhantes de grau n.

Exercício 3.8. IMOSL 2019 - A5
Sejam $x_1, x_{2,\ldots}, x_n$ números reais distintos entre si. Prove que

$$\sum_{1\leq i\leq n}\prod_{j\neq i}\frac{1-x_ix_j}{x_i-x_j}=0,$$

se n for par e 1, se n for ímpar.

Exercício 3.9. Russia 2021 - 11.2
Seja $P(x)$ um polinômio não nulo de grau $n>1$ com coeficientes não-negativos tal que a função $y=P(x)$ é ímpar. É possível que para pontos distintos $A_1, A_{2,\ldots}, A_n$ no gráfico $G:\ y=P(x)$ a seguinte condição é válida: a tangente a G por A_1 passa por A_2, a tangente a G por A_2 passa por A_3, ..., a tangente a G por A_n passa por A_1?

Exercício 3.10. Russia 2018 - 11.1
O polinômio $P(x)$ é tal que os polinômios $P(P(x))$ e $P(P(P(x)))$ são estritamente monótonos em todo o eixo real. Prove que $P(x)$, por sua vez, também é monótono em todo o eixo real.

3.2. Polinômios e outras funções: as raízes dos nossos problemas... Muitos problemas pedem para lidarmos com zeros de funções, especialmente de polinômios. Técnicas de análise, desde as mais rudimentares, como utilizar o Teorema do Valor Intermediário para obter raízes, usando diversas trocas de sinais, até às mais avançadas, como usar o princípio do argumento ou o Teorema da Gauss-Lucas, podem nos ajudar a entender o número e a posição dessas raízes.

Exemplo 3.11. China TST 2017 - TST3 Dia2 P1
Mostre que existe um polinômio mônico de grau 58 $P(x)=x^{58}+a_1x^{57}+\ldots+a_{58}$ tal que $P(x)$ possua exatamente 29 raízes positivas e 29 raízes negativas e tal que $log_{2017}|a_i|$ seja um inteiro positivo para todo $1\leq\ i\leq 58$.

Solução. Vamos construir tal polinômio por indução. Se quiséssemos um polinômio de grau 1 com uma raiz positiva, nenhuma negativa e a condição dos coeficientes mantida, poderíamos tomar $x-2017$. Para o caso 2, o primeiro mais interessante, tomemos $P_2(x)=x^2+2017(x-2017)$, pois em 0, a função é negativa. Podemos prosseguir nossa indução da seguinte maneira $P_1(x)=x-2017$ e $P_n\ (x)=x^n+(-1)^n2017^{k(n)}P_{n-1}(x)$, com $k(n)$ um natural grande o suficiente. Observe que $P_n\ (0)$ é negativo, pois $P_1\ (0)$. Além disso, se $P_{n-1}(x)$ possui $\frac{n-1}{2}$ raízes positivas e negativas, entre cada uma de suas raízes, há mudança de sinal. Ou seja, sendo $-a_1, -a_2, \ldots,\ -a_{\frac{n-1}{2}},\ a_{\frac{n+1}{2}}, \ldots,\ a_n$ suas raízes, com a_i positivo, temos que a função entre cada uma das raízes alterna de sinal, $+, -,\ +,\ -, ..., +$, então como $k(n)$ é suficientemente grande, $P_n(x)$ terá essas mudanças de sinal ao contrário $-, +, \ldots, -$. Assim, como sue coeficiente líder é positivo ao final da sequência, ainda haverá uma troca de sinal de $-$ para $+$, resultando em $\frac{n+1}{2}$ raízes positivas e $\frac{n-1}{2}$ raízes negativas (pois há $\frac{n-1}{2}$ raízes positivas e o mesmo número de negativas entre as raízes de $P_{n-1}(x)$, além de uma raiz, depois da última raiz desse polinômio. No caso em que n é par, o mesmo argumento mostra que $P_n(x)$ terá trocas de sinais, $+, -, +, \ldots, -, +$, com o último $+$ antes da troca de sinal para $-$ promovida pela primeira raiz de $P_{n-1}(x)$ resultando em, pelo mesmo argumento, um número igual de raízes positivas e negativas. Tome $n=29$.

Exemplo 3.12. China 2018 - P6 *Dados inteiros positivos, n, k com $n > k$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (k-1, k)$, se números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfazem a seguinte condição: Para qualquer conjunto $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}, |I| = k$, vale que $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} a_i$, ache o valor máximo de $x_1 x_2 \ldots x_n$.*

Solução. Uma boa conjectura para a resposta é $a_1 a_2 \ldots a_n$, pois pareceria ilógico pensar que uma sequência, moralmente, limitada por outra consiga ter um produto de seus termos maior do que a sequência limitante. Se $k = 1$, a resposta é obviamente a escrita acima, pois cada termo x_i é menor do que a_i. Assim, podemos provar por indução em n e em k (nessa ordem), que o máximo é de fato $a_1 a_2 \ldots a_n$. Seja $t_i = x_i - a_i$, então, se provarmos que existe j tal que $t_j = 0$, teremos terminado, pois olhando apenas para as desigualdades sem x_i e a_i, teremos o caso $(n, k-1)$. Podemos supor, portanto que $t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_m > 0 > t_{m+1} \geq \ldots \geq t_n$, e, naturalmente, $\sum_{i \in I} t_i \leq 0$ para I nas condições acima.

Perceba que t_m é interessante, pois ele é o candidato natural para tentarmos forçar a ser 0. Se $t_m \leq k-1$, então, podemos definir $b_{i \neq m} = a_i - \frac{t_m}{k-1}$, então podemos aplicar a hipótese de indução em b_i, pois $b_i \in (k-2, k-1)$ e $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}/m, |I| = k-1$, vale que $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} b_i$, o que resulta em $\Pi x_i = x_m \Pi_{i \neq m} x_i \leq (a + t_m) \Pi_{i \neq m} \left(a_i - \frac{t_m}{K-1}\right)$, e basta provarmos que para $t_m \leq k-1$, a expressão escrita é menor do que $a_1 a_2 \ldots a_n$, o que farei no final da solução.

Agora, se $t_m > k-1$, vamos tentar realizar transformações de variáveis para voltar ao outro caso, nesse caso $m < k$ (ou teríamos um absurdo pois a soma dos k primeiros $t_i s$ seria positiva). Chamemos de $p = k - m$. Note que, (alterando x_i), se trocarmos t_i para $i \leq m$ por $t_i - p\varepsilon$ ou por $t_i + m\varepsilon$, caso $i > m$, com $t_m - p\varepsilon \geq 0 \geq t_n + m\varepsilon$ e $t_m - p\varepsilon \geq t_{m+1} + m\varepsilon$. Logo, a equação $\sum_{i \in I} t_i \leq 0$, continua valendo, pois, o lado esquerdo é maximizado quando pegamos todos os m termos positivos, o que cancela a alteração feita. Provaremos que tal alteração apenas aumenta nosso produto. Supondo que uma operação leva t_i em r_i, consideremos $f(t) = (a_1 + r_1 + pt)(a_2 + r_2 + pt) \ldots (a_m + r_m + pt)(a_{m+1} + r_{m+1} - mt) \ldots (a_n + r_n - mt)$. Basta provarmos que $f(\varepsilon) < f(0)$, pois então com uma sequência de alterações faremos com que o problema caia no caso anterior, seja pelo termo t_m diminuindo o suficiente, seja pelo seu sucessor se tornando positivo. Para finalizar ambos os casos, precisamos entender o comportamento de polinômios cujas raízes são bem conhecidas.

Lema: Se $P(x)$ é um polinômio com de grau n e todas as suas raízes são reais, sendo x_1 sua maior raiz negativa e x_2 sua menor raiz positiva, então, se $f(0) > 0$ *e* $f(0)' < 0$, então $f'(x) < 0$ no intervalo $(0, x_2)$. Como $f'(x) = 0$, possui ao menos uma solução em cada intervalo entre raízes e possui n raízes reais, então como o grau de $f'(x)$ é $n-1$, ele possui exatamente uma solução em cada intervalo. Como $f(0) > 0$ a função está acima do eixo x e como $f(0)' < 0$, ela decresce, então o zero da derivada aconteceu anteriormente.

Para concluir o problema (parte 1), notamos que $(a + t_m) \Pi_{i \neq m} \left(a_i - \frac{t_m}{K-1}\right)$, visto como polinômio em t_m possui todas as raízes reais e $f(0) = a_1 a_2 \ldots a_n > 0$, assim como

$$f(0)' = a_1 a_2 \ldots a_n \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{k-1} \sum_{i \neq} \frac{1}{a_i}\right) < a_1 a_2 \ldots a_n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{n-1}{k(k-1)}\right) < 0,$$

seguindo que a função é decrescente até a primeira raiz, o que significa que o produto dos x_is é menor do que $a_1 a_2 \ldots a_n$.

Conclusão (parte 2) Todas as raízes de f são reais e

$$f(0)' = (a_1 + r_1)(a_2 + r_2) \ldots (a_m + r_m)(a_{m+1} + r_{m+1}) \ldots (a_n + r_n) > 0.$$

Ademais,

$$f'(0) = (a_1+r_1)(a_2+r_2)\dots(a_m+r_m)(a_{m+1}+r_{m+1})\dots(a_n+r_n)\left(p\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i+r_i} - m\sum_{i=m+1}^{n}\frac{1}{a_i+r_i}\right)$$
$$< \frac{1}{pm}\left(\frac{1}{a_m+r_m} - \frac{1}{a_{m+1}+r_{m+1}}\right) < 0$$

Então, pelo lema, $f(\varepsilon) < f(0)$ e terminamos o problema.

Exercício 3.13. China 2020 - P6
Existem números reais positivos $a_0, a_1, \dots, a_{19}$ tais que o polinômio $P(x) = x^{20} + a_{19}x^{19} + \dots + a_0$ não possui raízes reais, mas o polinômio obtido trocando quaisquer dois coeficientes a_i, a_j possui, ao menos, uma raiz real?

Exercício 3.14. ChinaTST 2022 - TST3 P6

a. *Prove que a área do fecho convexo de todas as raízes complexas de $z^{20} + 63z + 22 = 0$ possui área maior do que π.*

b. *Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ números complexos com soma 1, e $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ inteiros positivos ímpares. Seja ω um número complexo com norma pelo menos 1. Prove que a equação $a_1z^{k_1} + a_2z^{k_2} + \dots + a_nz^{k_n} = \omega$ possui ao menos uma raiz com norma, no máximo, $3n|\omega|$.*

Exercício 3.15. ChinaTST 2018 - TST4 Dia 2 P5
Suponha que o número real $\lambda \in (0,1)$, e seja n um inteiro positivo. Prove que o módulo de todas as raízes do polinômio

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{k(n-k)}x^k$$

é 1.

Exercício 3.16. Kömal - A.801
Para quais valores do inteiro positivo m é possível achar polinômios $P, Q \in C[x]$, com graus maiores ou iguais a 2, tais que $x(x+1)\dots(x+m-1) = P(Q(x))$

4 Equações Funcionais

4.1. Equações funcionais: Um Admirável Mundo Novo! Acabou-se a época em que para resolver uma equação funcional bastava considerar x ou y iguais a 0, iguais entre si, ou outras expressões que zeravam ou igualavam expressões nas quais a função seria aplicada. Uma das novas tendências em olimpíadas é mudar o domínio das equações funcionais ($f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) ou utilizar outras estratégias para forçar os alunos a utilizar desigualdades e outras ponderações analíticas sobre as funções. Nessa seção, enquanto alguns problemas exigem que provemos a existência de certos limites, da continuidade e até de derivadas, a presença de análise, geralmente, é reduzida a observar que certos fenômenos não podem acontecer para uma variável suficientemente grande ou pequena, caindo em contradições.

Exemplo 4.1. Cazaquistão 2020 - XI P2
Ache todas as funções $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ para as quais, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$, a seguinte igualdade é válida:

$$f(x)\, f(y) = f\left(\frac{xy}{xf(x) + y}\right)$$

Solução. Inicialmente, observe que o lado esquerdo é simétrico em x e y, enquanto o lado esquerdo não o é. Portanto,

$$f\left(\frac{xy}{xf(x) + y}\right) = f\left(\frac{xy}{yf(y) + x}\right).$$

Sendo f injetiva, obteriamos que $xf(x) - x$ é constante, o que implicaria que $f(x) = 1 + \frac{k}{x}$ para uma constante real positiva (o que satisfaz a equação original). Agora, basta provarmos que a função é injetiva ou constante e igual a 1. Observe que $f(x) \geq 1$, caso contrário, substituindo $y = x(1 - f(x))$, obteríamos $f(x)\, f(x(1 - f(x)) = f(x(1 - f(x))$ O que implicaria que $f(x) = 1$. Note também que a função é decrescente, pois, se $x > y_0$, tomando

$$y = \frac{xy_0 f(x)}{x - y_0},$$

temos que

$$f(x) \leq f(x)\, f\left(\frac{xy_0 f(x)}{x - y_0}\right) = f(y_0).$$

Por fim, sendo $f(x)$ não injetiva, existem a e b com $a > b$ tais que $f(a) = f(b) = c$, Substituindo $x = b$ e $y = t$, obtemos que $cf(t) = f\left(\frac{bt}{bc+t}\right)$. Agora, substituindo $x = a$ e $y = \frac{t}{1 + \frac{a-b}{abc}t}$, (o outro número que faz o segundo termo ser igual a $\frac{bt}{bc+t}$), obtemos que

$$cf\left(\frac{t}{1 + \frac{a-b}{abc}t}\right) = f\left(\frac{bt}{bc + t}\right),$$

implicando que

$$f(t) = f\left(\frac{t}{1 + \frac{a-b}{abc}t}\right),$$

o que implica por ela ser decrescente que ela é constante em $\left[\frac{t}{1 + \frac{a-b}{abc}t}, t\right]$, o que tomando o limite quando $t \to +\infty$ mostra que f é constante em em $\left[\frac{abc}{a-b}, +\infty\right]$. Sendo k tal constante e se utilizarmos a expressão original para $x = y$ no intervalo acima com $x > k(k+1)$, Obtemos que $k = 1$. Novamente, tomando $x = y$ no intervalo dado, obtemos que $1 = f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$, implicando que $f(x) = 1$ para todo x (Para todo $\varepsilon > 0$, existe m, tal que $\varepsilon 2^m$ pertence ao intervalo acima descrito). Logo, $f(x) = 1 + \frac{k}{x}$ para k uma constante real não negativa.

Exemplo 4.2. IMOSL 2017 - A8
Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui a seguinte a propriedade: Para todos x, $y \in \mathbb{R}$ tais que $(f(x) + y)(f(y) + x) > 0$, vale que $f(x) + y = f(y) + x$. Prove que $f(x) + y \leq f(y) + x$, sempre que $x > y$.

Solução. Seja $g(x) = x - f(x)$, podemos reescrever o problema em termos de g, pois devemos provar que essa função é não estritamente crescente, dado que que, sempre que $(g(x) - x - y)(g(y) - x - y) > 0$, $g(x) = g(y)$. O que significa que se, $g(x) \neq g(y)$, então $x + y$ está entre $g(x)$ e $g(y)$. Obviamente, para g constante, a hipótese e o enunciado do problema são satisfeitos. Podemos, portanto, assumir que g não é constante. Além disso, note que $h(x) = -g(-x)$ satisfaz as condições do enunciado, sempre que g também o faz.

Enquanto a descrição de todas as funções g que satisfazem o enunciado é um tanto complicada, foquemos em mostrar o problema. Inicialmente, provaremos que o conjunto pré-imagem de qualquer elemento c é limitado. Fixe y com $c \neq g(y)$. Assuma que $g(y) > c$, então se $g(x) = c$, pela condição do problema temos que $c \leq x + y \leq g(y)$, o que implica que $c - y \leq x \leq g(y) - y$, o que mostra que a pré-imagem de c é limitada. Se $g(y) < c$, podemos provar que a mesma relação funciona para h.

Agora note que, se $g(x) < g(y) < g(z)$, então $g(x) \leq x + y \leq g(y) \leq y + z \leq g(z)$ o que implica que $x < z$ (pois as duas variáveis são obviamente diferentes por suas funções serem diferentes).

Agora, observe que se, $g(x) > g(y)$ para $x < y$, então, para todo $a \in [x, y]$, $g(a) = g(x)$ ou $g(a) = g(y)$. Caso isso não acontecesse para qualquer ordem de $g(a)$ em relação a $g(x)$ *e* $g(y)$, obteríamos uma contradição da última desigualdade.

Chamaremos de um intervalo de Dirichlet (nomenclatura da solução oficial), aquele no qual a função g só possui dois valores para sua imagem. Suponhamos, pois, por contradição, que g possui um valor $x < y$ com $g(x) > g(y)$, tornando $[x, y]$ um intervalo de Dirichlet.

Seja $r = \inf(a \mid [a, y]$ é intervalo Dirichlet) e $r = \sup(b \mid [x, b]$ é intervalo Dirichlet). Pela finitude das pré-imagens, r e s são finitos e $r \leq x < y \leq s$. Então, chegaremos em uma contradição. Utilizemos a notação $g(x) = X$, $g(y) = Y$ e $\Delta = \frac{(y-x)}{2}$.

Admita que existe $t \epsilon [r, r + \Delta]$ com $g(t) = Y$. Pela definição de r, $[r - \Delta, y]$ não é um intervalo de Dirichlet e, logo, existe $r' \in [r - \Delta, r]$ com $g(r') \neq X, Y$. Observe que $g(r') < Y$, caso contrário $[r', y]$ seria de Dirichlet. Logo, pela condição do problema em (r', y) e (t, x), teríamos que $r' + y < Y < t + x$, o que implicaria que $\Delta > \frac{y-x}{2}$, um absurdo. Logo, para $t \in [r, r + \Delta], g(t) = X$ e aplicando o mesmo resultado para h, obtemos que para $t \in [s - \Delta, s], g(t) = Y$.

Por fim, podemos repetir o argumento que acabamos de usar. Sejam $y_1, y_2 \epsilon [s - \Delta, s]$ com $y_1 < y_2$ e $\delta = \frac{y_2 - y_1}{2}$, escolha $r' \in [r - \delta, r]$ com $g(r') \neq X, Y$, obtendo $g(r') < Y$. Escolha $t \epsilon [r, r + \Delta]$ e teremos $g(t) = X$, assim como $g(y_1) = g(y_2) = Y$, novamente, pelo enunciado do problema em (r', y_2) e (t, y_1), obtendo a mesma contradição que obtemos acima.

Esse problema mostra uma aplicação do princípio do extremo analítico, o mesmo usado na prova do teorema do valor intermediário, isto é, pegamos o ínfimo ou o supremo de um valor que satisfaz uma propriedade e tentamos estendê-lo).

Exemplo 4.3. Balkan 2022 - P3
Ache todas as funções $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *para as quais* $f\left(y(f(x))^3 + x\right) = x^3 f(y) + f(x)$, *para todos os* x, $y > 0$

Solução. Primeiro, provemos que f é estritamente crescente, fazendo $y = \frac{k}{f(x)^3}$, para k positivo, o que implica que $f(x + k) - f(x) = x^3 f\left(\frac{k}{f(x)^3}\right) > 0$. Então, mostraremos que podemos estender f para 0. Note que f é ilimitada, pois podemos tomar $y = 1$ e $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)^3 + x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x^3 f(1) + f(x) \geq \lim\limits_{x\to\infty} x^3 f(1) = \infty$. Provaremos que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

existe e é 0. Inicialmente, como a função é monótona e limitada quando f se aproxima do 0 na única direção possível, esse limite existe (charemos-no de L). Note que $L \geq 0$, por conta do contradomínio da função. Assim, a função, por ser monótona, é limitada inferiormente por L. Se $L > 0$, tomando $f(yL^3) < f\left(yf(x)^3 + x\right) = x^3 f(y) + f(x)$, o que tomando $f(yL^3) > L+1$ (com y fixado) e $x \to 0$), resultaria em um absurdo $L = 0$. Agora, mostremos que a função é contínua, comecemos pela continuidade pela direita $\lim_{t\to 0} f(x+t) - f(x) = \lim_{y\to 0} f\left(yf(x)^3 + x\right) - f(x) = \lim_{y\to 0} x^3 f(y) = 0$. (a existência do limite da última função é evidente) Mostremos, a continuidade pela esquerda, tome $x = u - v$ e $y = \frac{v}{\varphi(v-v)^3}$, obtendo $f(u) - f(u-v) = (u-v)^3 f\left(\frac{v}{f(u-v)^3}\right)$. (Não é óbvio que podemos tomar os limites, ainda). No entanto, tomando $v_0 > v$ fixo, obtemos que

$$0 < f(u) - f(u-v) = (u-v)^3 f\left(\frac{v}{f(u-v)^3}\right) < u^3 f\left(\frac{v}{\rho(u-v_0)^3}\right).$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}\lim_{v\to 0} 0 < \lim_{v\to 0} & f(u) - f(u-v) \\ &= \lim_{v\to 0} (u-v)^3 f\left(\frac{v}{f(u-v)^3}\right) \\ &< \lim_{v\to 0} u^3 f\left(\frac{v}{f(u-v_0)^3}\right) \\ &= \lim_{t\to 0} u^3 f(t) = 0\end{aligned}$$

(pelo teorema do confronto (sanduíche) o segundo limite existe (o primeiro e o último existem)). Assim a função é contínua. Desse modo, 1 possui uma e somente uma pré-imagem, a qual provaremos ser 1 (chamemo-la de t). Se $t < 1, t^3 f(y) + 1 = f(y+t) > f(y)$, o que falha para y suficientemente grande. Se $t > 1$, $f(1) < 1$, então, fazendo $x = 1$ e $y = \frac{1}{1-f(1)^3}$, teremos $f(1) = 0$,uma óbvia contradição. Logo, $f(1) = 1$, o que implica, substituindo $x = 1$, que a função é a identidade nos naturais. Ademais, sendo $y = \frac{m}{n}$ e $x = n$ obtemos que

$$n^3 f\left(\frac{m}{n}\right) + n = f\left(\frac{m}{n} f(n)^3 + n\right) = f\left(mn^2 + n\right) = mn^2 + n,$$

implicando que a função também é a identidade nos racionais, o que implica que a função é a identidade em todo o seu domínio, por $\mathbb{Q}$ ser denso em $\mathbb{R}$.

Notas sobre $\mathbb{Q}$ ser denso em $\mathbb{R}$, uma expressão misteriosa. Quando muitos alunos aprendem, inicialmente, a equação funcional de Cauchy, a prova de que a função é linear nos racionais lhes parece muito natural, mas o truque de mágica final que lhes permite estender essa solução para os reais parece incompreensível para muitos até cursarem análise. Atento-me ao caso em que se admite que a função é crescente, pois é mais elementar, mas não mais complicado do que o caso em que a função é contínua e bem mais comum em olimpíadas. Argumento: Sendo r um número real, suponha que $f(r) \neq r$, sem perda de generalidade $f(r) = r + \epsilon$, com essa última variável positiva. Podemos tomar um racional q entre r e $r+\epsilon$ (por exemplo copiamos as primeiras casa decimais nas quais eles coincidem e repetimos 9 no resto das casa decimais), obtendo $r < q = f(q) < f(r)$. Uma variação de tal argumento é que $f(rn) = f(r)n = n(r+\varepsilon) > m = f(m)$, para inteiros n e m adequados. Nós criamos espaço para encaixar o ponto fixo da nossa função, pois, comumente, teremos uma condição mais fraca do que crescente/decrescente.

Exercício 4.4. Vietnã TST 2022 - P1
Dado um número real α *e a função* $\varphi(x) = x^2 e^{\alpha x}$ *para* $x \in \mathbb{R}$, *ache todas as funções* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que satisfazem*

$$f(\varphi(x) + f(y)) = y + \varphi(f(x)),$$

para quaisquer $x,y \in \mathbb{R}$.

Exercício 4.5. ChinaTST 2019 - Teste 3.P4
Ache todas as funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *tais que*

a. $f(0, x)$ *é não decrescente.*

b. *Para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$ $f(x, y) = f(y, x)$.

c. *Para quaisquer* $x, y, z \in \mathbb{R}(f(x, y) - f(y, z))(f(y, z) - f(z, x))(f(z, x) - f(x, y)) = 0$.

d. *Para quaisquer* $x, y, a \in \mathbb{R}, f(x + a, y + a) = f(x, y) + a$.

Exercício 4.6. USATST 2021 - P3
Ache todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que satisfaçam a seguinte desigualdade*

$$f(y) - \left(\frac{z - y}{z - x} f(x) + \frac{y - x}{z - x} f(z)\right) \leq f\left(\frac{x + z}{2}\right) - \frac{f(x) + f(z)}{2},$$

para quaisquer números reais $x<y<z$.

Exercício 4.7. ChinaTST 2016 - Teste3 Dia2 P6
Ache todas as funções $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *satisfazendo a seguinte condição: para quaisquer três números reais distintos a,b,c, um triângulo pode ser formado de lados a,b,c se e somente se um triângulo também pode ser formado com lados* $f(a), f(b), f(c)$.

Exercício 4.8. Cazaquistão 2021 - 10.5
Ache todas as funções $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, *para as quais* $f(x)^2 = f(xy) + f(x + f(y)) - 1$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Exercício 4.9. Coréia 2017 - P7
Ache todos os números reais c para os quais existe uma função $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ *satisfazendo o seguinte: Para todos os reais não negativos x e y,* $f(x + y^2) \geq cf(x) + y$.

Exercício 4.10. IMOSL 2020 - A8
Seja $\mathbb{R}^+$ *o conjunto dos números reais positivos. Determine todas as funções* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *para as quais, para todos os reais positivos x e y,* $f(x + f(xy)) + y = f(x) f(y) + 1$

Exercício 4.11. Kömal A.756
Ache todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfazendo as seguintes condições,* $f(x + 1) = f(x) + 1$ *e* $f(x^2) = f(x)^2$.

Exercício 4.12. USAMO 2016 - 4
Ache todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *para as quais, para todos os reais positivos x e y,* $(f(x) + xy) f(x - 3y) + (f(y) + xy) f(3x - y) = f(x + y)^2$.

Exercício 4.13. Japão 2019 - P3
Ache todas as funções $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, *para as quais* $f\left(\frac{f(y)}{f(x)} + 1\right) = f(x + yx + 1) - f(x)$ *para todos os reais positivos* x *e* y.

Exercício 4.14. Brasil 2019 - P3
Seja $\mathbb{R}_{>0}$ *o conjunto dos números reais positivos. Determine todas as funções* $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, *para as quais* $f(xy + f(x)) = f(f(x) f(y)) + x$ *para todos os reais positivos* x *e* y.

5 Análise em Teoria dos Números

5.1. Análise em teoria dos números: um assunto denso. O conceito de densidade natural de um conjunto pode ser definido como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|S \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n}$$

(o que, na prática, é substituído por uma cota do numerador) para certo conjunto S. Mais intuitivamente, estamos medindo qual proporção dos naturais satisfazem a propriedade $x \in S$. Quando devemos provar que existem infinitos inteiros que satisfazem/não satisfazem certa propriedade, basta provar que a densidade natural dos números que satisfazem tal propriedade é > 0 ou < 1. Isso nos permite, geralmente, com estimativas um tanto grosseiras, provar que existem infinitos/finitos naturais que satisfazem/não satisfazem certa propriedade. Além disso, isso permite mostrar que certos conjuntos não estão contidos em outros ou que eles intersectam, pois o número de inteiros até de uma sequência pode ter uma cota superior e a outra pode ter uma cota inferior, no primeiro caso, ou pela soma das densidades ser maior do que 1 no segundo caso.

Exemplo 5.1. $S = \{1, 4, 8, 9, \ldots\}$ *o conjunto dos inteiros que são potências perfeitas.* $(S = n^k | n, k \in \mathbb{Z}, k \geq 2)$. *Organizamos os elementos de* S *em ordem crescente* $\{a_i\}$. *Prove que existem infinitos* n *tais que* $9999 \mid a_{n+1} - a_n$.

Solução. Observe que a maior parte dos elementos de S são quadrados perfeitos, pois toda potência perfeita com expoente par é um quadrado. Além disso, se conseguirmos infinitos intervalos arbitrariamente grandes de elementos de S quadrados perfeitos, o resultado segue imediatamente, pois a diferença de tais quadrados seria uma sequência de ímpares consecutivos, algo regular módulo 9999.

Formalizando, vamos supor por absurdo que a quantidade de quadrados consecutivos em S com diferença divisível por 9999 é um conjunto finito, ou seja para N suficientemente grande, se $x > N$ e $x \equiv 4999 \mod 9999$ (sem perda de generalidade, existe um $b_x^{e_x}$ em S com ambas as variáveis inteiras e e_x ímpar) entre x^2 e $(x+1)^2$. Logo $e_x \geq 3$.

Vamos, então, para o nosso argumento de densidade. Seja t_n o número de potências perfeitas ímpares até n. Pela nossa hipótese acima, entre 1 e $(N + 9999m)^2$, existem ao menos m potências ímpares. Logo $t_{(N+9999m)^2} \geq m$, o que significa que, para n suficientemente grande (revertendo as variáveis dependentes e independentes na desigualdade acima), $t_n \geq \frac{\sqrt{n}}{1000}$ (uma cota quadrática para as potências ímpares).

Podemos, no entanto, estabelecer uma cota superior para t_n por sua definição. Observe que podemos cotar t_n pelas soma raízes ímpares de n (pois, há no máximo $\sqrt[k]{n}$ potências k-ésimas entre 1 e n). Ademais, apenas precisamos considerar os expoentes menores ou iguais a $log_2 n$, pois 2 é a menor base que gerará potências perfeitas, assim:

$$t_n \leq \sum_{i=1}^{log_2 n} \sqrt[i]{n} < log_2 n \left(\sqrt[3]{n}\right) \tag{1}$$

O que resultaria em

$$\frac{\sqrt{n}}{1000} < log_{2} n \left(\sqrt[3]{n}\right) \Leftrightarrow \sqrt[6]{n}/ \log_2 n < 1000 \log_2 n,$$

o que é um claro absurdo tomando o limite de n indo para ∞. Esse problema ilustra um truque importante quando trabalhando com desigualdades assimptóticas. Obviamente, obteríamos um absurdo pois teríamos uma aproximação da ordem de raíz quadrada, com outra da ordem de raíz cúbica, por isso, não é necessário ter muito cuidado com os termos de ordem inferiores (por exemplo, logarítmos). Em outras palavras, em (1), a última desigualdade não é muito fraca, pois ela apenas adiciona um termo logarítmico em uma aproximação polinomial.

Exemplo 5.2. IZHO 2022 - P5 *Um polinômio $f(x)$ com coeficientes reais e grau maior do que 1 é dado. Prove que existem infinitos inteiros positivos que não podem ser representados na forma*

$$f(n+1) + f(n+2) + \ldots + f(n+k),$$

sendo n e k inteiros positivos.

Solução. Novamente, podemos observar que um argumento de densidade deve funcionar, pois se o resultado fosse falso, a densidade natural do conjunto S dos números que podem ser representados como acima seria 1, enquanto, em realidade, ela deve ser 0. Nossa estratégia, portanto, será cotar $t_n = |S \cap \{1, 2, \ldots, n\}|$ por qualquer expressão de ordem menor do que n.

Obviamente, podemos, sem perda de generalidade, assumir que o coeficiente líder de $f(x)$ é positivo, caso contrário, para $f(x)$ suficientemente grande, ele será sempre negativo, satisfazendo o enunciado. Agora, note que $f(x) \geq a_1 x^d + a_2$ para constantes a_1 menor do que o coeficiente líder do polinômio e maior do que 0 e a_2 negativo tal que, para os casos pequenos de x, a desigualdade seja válida. Agora, note que

$$\begin{aligned} f(n+1) + f(n+2) + \ldots + f(n+k) &\geq a_1 x^d + a_1 (x+1)^d + \ldots + a_1 (x+k)^d + \ a_2 k \\ &\geq a_1 x^2 + a_1 (x+1)^2 + \ldots + a_1 (x+k)^2 + \ a_2 k \\ &\geq a_1 \left(kn^2 + k^3\right) + a_2 k \end{aligned}$$

Assim, para que $f(n+1) + f(n+2) + \ldots + f(n+k) \leq N$, basta que $a_1 (kn^2 + k^3) + a_2 k \leq N$, bastando, pois, que $n \leq c_1 \sqrt[2]{N}$ e $k \leq c_2 \sqrt[3]{N}$. Portanto, $t_N \leq c_1 c_2 N^{5/6}$, (dado que o número de escolhas para n vezes o número de escolhas para k é maior que o número total de representações) que possui ordem menor do que N como desejado.

Exercício 5.3. Sudeste Chinês 2020 - 11.7
Organize todos os inteiros positivos livres de quadrados em ordem crescente $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$. Prove que existem infinitos inteiros n, tais que $a_{n+1} - a_n = 2020$.

Exercício 5.4. Brasil 2020 - P2
Para a inteiro positivo, defina $F_{(1)}^{(a)} = 1$, $F_{(2)}^{(a)} = a$ *e, para* $n > 2$, $F_{(n)}^{(a)} = F_{(n-1)}^{(a)} + F_{(n-2)}^{(a)}$. *Um inteiro positivo é fibonático quando é igual a* $F_{(n)}^{(a)}$ *para algum a inteiro positivo e algum* $n > 3$. *Prove que existem infinitos números inteiros que não são fibonáticos.*

Exercício 5.5. IMOSL 2015 - N6
Seja $\mathbb{Z}_{>0}$ *o conjunto dos inteiros positivos. Considere uma função* $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$. *Para quaisquer* $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, *escrevemos* $f^n(m) = f(f(\dots f(m)_{\dots}))$ *aplicada n vezes. Suponha que* f *possua as seguintes duas propriedades,*

1. *Se* $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, *então*
$$\frac{f^n(m) - m}{n} \in \mathbb{Z}_{>0}$$
2. *O conjunto* $\mathbb{Z}_{>0}\{f(n) \mid n \in Z_{>0}\}$ *é finito.*

Prove que a sequência $f(1) - 1, f(2) - 2, f(3) - 3 \dots$ *é periódica.*

Exercício 5.6. ChinaTST 2018 - Dia2 P2
Dado um inteiro positivo k, chame n de bom, se entre

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n},$$

ao menos, 0.99n entre os números é divisível por k. Mostre que existe um inteiro positivo N tal que entre $1, 2, \dots, N$, *existem, ao menos, 0.99N números bons.*

Exercício 5.7. ChinaTST2015 - Teste 3 P3
Prove que existem infinitos números inteiros n tais que $n^2 + 1$ *é livre de quadrados.*

Exercício 5.8. IMOSL 2019 - N6
Seja $H = \left\{ \lfloor i\sqrt{2} \rfloor : i \in \mathbb{Z}_{>0} \right\} = \{1, 2, 4, 5, 7, \dots\}$ *e seja n um inteiro positivo. Prove que existe uma constante C tal que, se* $|A| \geq C\sqrt{n}$, *então existem* $a, b \in A$ *com* $a - b \in H$ *(*$\mathbb{Z}_{>0}$ *denota o conjunto dos inteiros positivos e* $\lfloor z \rfloor$ *denota o maio inteiro menor ou igual a z)*

5.2. Cotando com Análise, a integralidade dos meus segredos. Muitos problemas em álgebra e teoria dos números utilizam como pressupostos certas cotas provenientes de integrais. Algumas delas são bem conhecidas como $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^k}$ diverge se e somente se $k \leq 1$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$, mas outras nem tanto como $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x \to \ln(k+1) < \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{i} < \ln k + 1$. Alguns desses resultados, em particular, são originados do seguinte resultado: Uma soma de Riemann a direita/esquerda super/subestima a integral da função no intervalo, ou seja, para conseguir desigualdades de somatórios basta interpretá-los como retângulos que estão aproximando o gráfico de certa função (a função da variável somada). Mesmo sem o domínio desse método, as desigualdades acima se provaram bem úteis em diversos contextos.

Exemplo 5.9. Alemanha 2020 - P3 *Mostre que a equação* $x(x+1)\dots(x+2020) - 1 = 0$ *possui exatamente uma raiz positiva* x_0 *e prove que essa solução satisfaz*

$$\frac{1}{2020! + 10} < x_0 < \frac{1}{2020! + 6}.$$

Solução. A primeira pergunta relevante para entender esse problema é de onde vem esse 2020!? Parece que não queremos estimar x_0, mas $\frac{1}{x_0} - 2020!$, variável que chamaremos de a. Obviamente, temos apenas uma solução, pois $x\,(x+1)\ldots(x+2020) - 1$ é crescente para x positivo. Inicialmente, observe que

$$2020! \sum_{i=1}^{2020} \frac{x_0}{i} + 2020! < \prod_{i=1}^{2020} (i + x_0) = 2020! + a.$$

Assim,

$$\frac{a}{2020! x_0} = a\,(1 + a/2020!) > \sum_{i=1}^{2020} \frac{1}{i} > ln(2021),$$

o que implica que $a > 6$. Agora, note que:

$$\prod_{i=1}^{2020} \left(1 + \frac{x_0}{i}\right) = \frac{1}{2020! x_0} = \frac{2020! + a}{2020!}.$$

Tirando o logarítimo de ambos os lados,

$$\sum_{i=1}^{2020} ln\left(1 + \frac{x_0}{i}\right) = \ln\left(1 + \frac{a}{2020!}\right).$$

Então, como notado acima,

$$\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x \to \ln(k+1) < \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{i} < \ln k{+}1 : \sum_{i=1}^{2020} ln\left(1 + \frac{x_0}{i}\right) < \sum_{i=1}^{2020} \frac{x_0}{i} < x_0\,(1 + \ln 2020)\,.$$

Além disso,

$$ln(1 + \frac{a}{2020!}) > \frac{\frac{a}{2020!}}{\frac{a}{2020!} + 1} = ax_0$$

Assim, $a < 1 + \ln 2020 < 10$.

Exercício 5.10. Polônia 2019 - P5
A sequência de reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfaz as seguintes condições $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq 1$ e $a_i \leq a_{i-1} + 1$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sendo a_0 um inteiro. Prove que $n \leq 4a_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$

Exercício 5.11. ChinaTST 2018 - P3
Prove que existe uma constante $C > 0$ tal que a desigualdade $H\,(a_1) + H\,(a_2) + \ldots + H\,(a_m) \leq C\sqrt{\sum_{i=1}^{m} ia_i}$ acontece para um inteiro positivo arbitrário m e inteiros positivos $a_1, a_2 \ldots, a_m$, com $H\,(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Exercício 5.12. IMO 2016 - P5
A equação $(x-1)\,(x-2)\ldots(x-2016) = (x-1)\,(x-2)\ldots(x-2016)$ está escrita em um quadro, com 2016 fatores lineares de cada lado. Qual é o menor valor inteiro positivo k para o qual é possível apagar k dentre os 4032 fatores lineares de tal modo que ao menos um fator linear permaneça de cada lado e a equação resultante não possua soluções.

Exercício 5.13. IZHO 2022 - Dia 2 P5
Existem duas sequências limitadas $a_1, a_2, \ldots$ *e* $b_1, b_2 \ldots$ *tais que, para cada par de inteiros positivos* m, n *com* $m > n$*, ao menos uma das duas desigualdades* $|a_m - a_n| > 1\sqrt{n}$ *e* $|b_m - b_n| > 1\sqrt{n}$ *é satisfeita.*

Exercício 5.14. Kömal - 824
Um conjunto infinito S *de números positivos é chamado de grosso, se em cada intervalo da forma* $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ *(sendo* n *um inteiro positivo arbitrário) existe um número que é a diferença finita de elementos de* S*. Existe um conjunto grosso tal que a soma dos seus elementos é finita?*

6 Problemas que Sobraram

Pensou que acabou? Na verdade, sim... Esses são alguns problemas que eu não consegui ou preferi não encaixar em outras seções e que, talvez, tenham ideias legais (talvez não...). Divirtam-se!

Exercício 6.1. VietnãTST 2021 - Dia 2 P4
Sejam a, b, c *números não-negativos tais que* $2\left(a^2+b^2+c^2\right)+3(ab+bc+ca)=5(a+b+c)$*. Prove que* $4\left(a^2+b^2+c^2\right)+2(ab+bc+ca)+7abc \leq 25$

Exercício 6.2. Russia 2022 - 11.2
No plano cartesiano, os gráficos das funções $y=\sin x$ *e* $y=\tan x$ *estão desenhados, junto com os eixos coordenados. Usando apenas régua e compasso construa uma reta tangente ao gráfico da função seno por um ponto acima do eixo,* Ox *, assim como por um ponto abaixo do eixo (as retas podem intersectar o gráficos em diversos outros pontos).*

Exercício 6.3. China 2018 - Segunda Rodada Teste 2 P1
Sejam $a_1, a_2, \ldots,\ a_n$ *e* $b_1, b_2 \ldots,\ b_n$*,* A, B *números reais positivos tais que* $a_i \leq\ b_i$ *e* $a_i \leq A$ $(i=1,2,\ldots,\ n)$ *e*

$$\frac{b_1 b_2 \ldots b_n}{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{B}{A}.$$

Prove que

$$\frac{\left(b_1+1\right)\left(b_2+1\right) \ldots\left(b_n+1\right)}{\left(a_1+1\right)\left(a_2+1\right) \ldots\left(a_n+1\right)} \leq \frac{B+1}{A+1}.$$

Exercício 6.4. ChinaTST 2018 - Dia 1 P1
Sejam $p,\ q$ *números reais positivos com soma 1. Prove que, para qualquer* n*-upla de reais* $(y_1, y_2,\ \ldots,\ y_n)$*, existe outra* n*-upla de reais* $(x_1, x_2,\ \ldots,\ x_n)$ *satisfazendo* $p \cdot \max\left\{x_i, x_{i+1}\right\}+q \cdot \min\left\{x_i,\ x_{i+1}\right\}=y_i$ *Para todo* $i=1,2,\ldots,2017$*, com* $x_{2018}=x_1$

Exercício 6.5. Iran 2019 - Terceira rodada P1
Ache todas as funções $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ *tal que, para quaisquer inteiros positivos distintos* x, y, z*, o valor de* $x+y+z$ *é um quadrado perfeito se e somente se* $f(x)+f(y)+f(z)$ *é um quadrado perfeito.*

Exercício 6.6. IMOSL 2020 - N6
Para um inteiro positivo n*, seja* $d(n)$ *o número de divisores positivos de* n *e* $\varphi(n)$ *o número*

de inteiros positivos que não excedem n e são primos com n. Existe uma constante C tal que, para todo $n \geq 1$,

$$\frac{\varphi(d(n))}{d(\varphi(n))} \leq C?$$

Exercício 6.7. Itália 2020 - P3
Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$ e $b_1, b_2, \ldots, b_{2020}$ números reais não necessariamente distintos. Suponha que o conjunto de inteiros positivos dos n para os que a equação: $|a_1 |x - b_1| + a_2 |x - b_2| + \ldots + a_{2020} |x - b_{2020}|| = n(1)$ possui exatamente duas soluções reais é um conjunto finito. Prove que o conjunto dos n para os quais a equação (1) possui ao menos uma solução também é finito.

Exercício 6.8. ChinaTST 2015 - TST 2 Dia 2 P1
Seja n um inteiro positivo e sejam $f_1, f_2, \ldots, f_n$, n funções reais limitadas, e sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n números reais distintos. Mostre que existe um número real x tal que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x - a_i) < 1.$$

Exercício 6.9. ChinaTST 2021 - Teste 3 Dia 1 P3
Determine a maior constante real C tal que, para todo inteiro positivo $n \geq 2$, existem $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [-1, 1]$, tal que

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \geq C^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Exercício 6.10. China TSTST 2017 - Dia 2 P4
Ache todos os pares de inteiros (m, n) tal que existam dois polinômios mônicos $P(x)$ e $Q(x)$, com $\deg P = m$ e $\deg Q = n$, satisfazendo $P(Q(t)) \neq Q(P(t))$ Para qualquer número real t.

Exercício 6.11. ChinaTST 2022 - TST 1 P5
Seja $C = z \in \mathbb{C} |z| = 1$ o círculo unitário no plano complexo. Sejam $z_1, z_2, \ldots, z_{240} \in C$ 240 números complexos (não necessariamente distintos), satisfazendo as seguintes duas condições:

i. Para qualquer arco aberto Γ de comprimento π em C, existem, no máximo, 200 números j $(1 \leq j \leq 240)$ tais que $z_j \in \Gamma$.

ii. Para qualquer arco aberto γ de comprimento $\frac{\pi}{3}$ em C, existem, no máximo, 120 números j $(1 \leq j \leq 240)$ tais que $z_j \in \gamma$.

Ache o máximo de $|z_1 + z_2 +, \ldots, +z_{240}|$.

7 Sumário de Definições e Teoremas Essenciais

Neste epílogo, vamos listar e explicitar os principais tópicos de Análise que foram citados no artigo. Como o foco deste material é mais a utilização destes conceitos como ferramental para resolução de problemas olímpicos do que o estudo aprofundado dos conceitos teóricos, não demonstraremos os teoremas; isto fica a cargo do leitor.

Definição. *Supremo e Ínfimo.* Primeiro, vamos definir o que são pontos superiores e inferiores de um conjunto. Considere um conjunto A:

1. u é chamado de um *ponto inferior* de A se, para todo $a \in A$, $a \geq u$. Se A possui um ponto inferior, então A é chamado de um conjunto limitado inferiormente.

2. v é chamado de um *ponto superior* de A se, para todo $a \in A$, $a \leq v$. Se A possui um ponto superior, então A é chamado de um conjunto limitado superiormente.

3. Se A é limitado inferiormente e superiormente, então falamos que A é limitado.

Agora estamos prontos para a definição principal. Considere um conjunto A:

1. i é chamado de *ínfimo* de A se, para todo ponto inferior u de A, $i \geq u$. Dada esta definição, podemos chamar o *ínfimo* também de *maior ponto inferior*.

2. s é chamado de *supremo* de A se, para todo ponto superior v de A, $v \geq s$. Dada esta definição, podemos chamar o *supremo* também de *menor ponto superior*.

Note que, dadas as definições, é trivial demonstrar por absurdo que tanto o ínfimo quanto o supremo são únicos.

Definição. *Conjunto Compacto.* Primeiro, definimos o que é uma *cobertura* de um conjunto. Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma cobertura de X quando $\mathcal{C}$ é uma família $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de conjuntos, tal que

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C \subset X.$$

Ou seja, para todo $x \in X$, existe um $C_\lambda \in (C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tal que $x \in C_\lambda$. Nós dizemos que uma cobertura é *aberta* quando ela é composta apenas por conjuntos abertos. Chamamos $\mathcal{C}'$ de uma *subcobertura* de $\mathcal{C}$ se ela é um subconjunto de $\mathcal{C}$ e ainda é uma cobertura de X. Dizemos que uma cobertura/subcobertura é finita se ela possui finitos conjuntos e infinita se ela possui infinitos conjuntos.

Agora, sim, estamos prontos para a definição de um conjunto compacto. Dizemos que X é *compacto* se, para toda cobertura aberta de X, existe uma subcobertura aberta e finita.

Teorema 7.1. *Teorema do Valor Extremo. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, contínua. Então, existe $c, d \in [a, b]$ tal que*

$$\forall x \in [a, b], f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

Teorema 7.2. *Teorema do Valor Intermediário. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, contínua. Suponha, sem perda de generalidade, que $f(a) < f(b)$. Se $c \in (f(a), f(b))$, então existe um $x \in [a, b]$ tal que,*

$$f(x) = c.$$

Teorema 7.3. *Teorema do Valor Médio. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Suponha, sem perda de generalidade, que $f(a) < f(b)$. Então, existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema 7.4. *Regra de L'Hôpital. Sejam $f, g\colon I \to \mathbb{R}$, com I um intervalo aberto, diferenciáveis em I, exceto, possívelmente, em $c \in I$. Se $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ e*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \text{ ou } \pm\infty,$$

então

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Teorema 7.5. *Critério da Razão/de d'Alembert. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ com cada $a_i \geq 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| := L$. Se,*

1. *$L < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;*
2. *$L > 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge;*
3. *$L = 1$, então o teste é inconclusivo.*

Teorema 7.6. *Teorema do Confronto/Sanduíche. Seja I um intervalo e f, g e h funções definidas nesse intervalo exceto, possivelmente, em $a \in I$. Suponha que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in I$ exceto, possivelmente, para a. Se,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) := L,$$

então,

$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

Teorema 7.7. *Teorema de Bolzano-Weierstrass. Esta proposição possui duas possíveis formalizações, uma usando sequências e outra usando topologia. Para mais generalidade e entendimento, iremos apresentar as duas aqui:*

I. Primeiro, com sequências. Seja (a_n) uma sequência. Se (a_n) é limitada, então (a_n) possui uma subsequência convergente.

II. Agora, para o formato de topologia, temos que apresentar um conceito rápido, o de ponto limite. Dizemos que p é um ponto limite de um conjunto A se para todo intervalo aberto I contendo p,

$$I \cap (A \setminus \{p\}) \neq \emptyset.$$

Então, o Teorema de Bolzano-Weierstrass nos diz que para todo conjunto infinito X, se X é limitado, então X possui pelo menos um ponto limite.