DIA 1

6 de agosto de 2022

Problema 1. Um inteiro positivo é *feliz* se:

- todos os seus dígitos são distintos e diferentes de zero,
- um dos seus dígitos é igual à soma dos outros dígitos.

Por exemplo, 253 é um número feliz. Quantos números são felizes?

Problema 2. Seja ABC um triângulo acutângulo. A circunferência Ω inscrita no triângulo é tangente aos lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. A perpendicular ao lado BC por B corta a reta EF no ponto M, e a perpendicular ao lado BC por C corta a reta EF no ponto N. As retas DM e DN cortam novamente Ω nos pontos P e Q, respectivamente. Mostre que os segmentos DP e DQ têm o mesmo comprimento.

Problema 3. Mostre que para todo inteiro positivo n, existe um inteiro positivo k, tal que cada um dos números $k, k^2, \ldots, k^n$ possui pelo menos um bloco 2022 na sua representação decimal.
Por exemplo, os números 4**2022**13 e 544**2022**1**2022** possuem pelo menos um bloco 2022 na sua representação decimal.

Duração da prova: 4 horas.
Pontuação de cada problema: 10 pontos.

DIA 2

7 de agosto de 2022

Problema 4. Ana e Beto jogam em um tabuleiro quadriculado com 2022×2022 casas. Ana pinta de vermelho os lados de algumas casas do talubeiro, de modo que nenhuma casa tenha dois lados vermelhos compartilhando um vértice. Depois disso, Beto deve pintar um caminho azul que une duas das quatro esquinas do tabuleiro, seguindo os lados das casas e sem usar nenhum segmento vermelho. Se Beto conseguir, é o ganhador, caso contrário, Ana ganha. Quem tem a estratégia vencedora?

Problema 5. Um número inteiro $n > 1$, cujos divisores positivos são $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, é *sureño* se todos os números

$$d_2 - d_1,\ d_3 - d_2, \ldots,\ d_k - d_{k-1}$$

são divisores de n.

i) Encontre um inteiro positivo que não é sureño e possui exatamente 2022 divisores positivos que são sureños.

ii) Mostre que existem infinitos inteiros positivos que não são sureños e possuem exatamente 2022 divisores positivos que são sureños.

Problema 6. Em um quadro estão escritos os números inteiros $1, 2, 3, \ldots, 170$. Deseja-se colorir cada número com uma das k cores $C_1, C_2, \ldots, C_k$, de modo que seja satisfeita a seguinte condição: para cada i com $1 \leq i < k$, a soma de todos os números de cor C_i divide a soma de todos os números de cor C_{i+1}. Determine o valor máximo de k para o qual é possível fazer essa coloração.

Duração da prova: 4 horas.
Pontuação de cada problema: 10 pontos.