Equações Funcionais Inteiras

Gabriel Ribeiro Paiva
gabrielpaiva2002@gmail.com

Principais tipos de equações funcionais inteiras

Podemos dividir essas equações em três tipos principais:

- as “normais”;
- as de divisibilidade;
- as “estranhas”.

Iremos apresentá-las nas próximas seções.

“Normais”

Estas são muito parecidas com as equações funcionais que já estamos acostumados, então as técnicas mais comuns costumam ser as mesmas (se estiver lendo o pdf digital, pode encontrar um material meu sobre esse assunto clicando aqui).

Além dessas, podemos destacar a busca por equações do formato

$$f(x + c_1) = f(x) + c_2 \,\forall\, x \in \mathbb{Z},$$

onde $c_1 \neq 0$ e c_2 são constantes inteiras.

Achar tipo de equação pode até acabar com o problema, uma vez que uma simples indução prova que

$$f(x + kc_1) = f(x) + kc_2 \,\forall\, x, k \in \mathbb{Z},$$

o que faz a função depender apenas dos valores de $f(0), f(1), \ldots, f(|c_1| - 1)$

Como exemplo, temos o problema 1 da IMO de 2019:

Problema. Determine todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que, para todos os inteiros a e b,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$

Não se acanhe em pensar nele por ter caído em uma olimpíada internacional tão renomada como a IMO, você verá que ele é bem mais fácil do que parece.

Divisibilidade

Estas não são equações propriamente ditas. Elas satisfazem alguma condição do tipo *expressão 1* divide *expressão 2* e essas expressões contêm valores de f.

As técnicas mais comuns para resolver esse tipo de problema são:

- forçar a aparição de algum fator da *expressão 1* que divida muitos termos da *expressão 2*;
- forçar com que a *expressão 2* seja uma potência de primo com expoente fixo, daí a *expressão 1* assumirá finitos valores;
- tentar achar $f(x)$ para infinitos valores de x e manipular a *expressão 2* para que ela não dependa de x, enquanto a *expressão 1* depende (isso faz com que a *expressão 2* seja 0).

Como exemplo, temos o N1 da SL da IMO de 2013:

Problema. Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ tais que

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

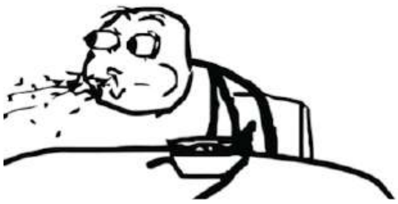
para todos os inteiros positivos m e n.

Aqui vale o mesmo conselho da seção anterior: não se intimide pela origem da questão, você verá que ela é mais fácil do que parece.

"Estranhas"

Acredito que, para essa classe de equações, uma imagem vale mais que mil palavras:

$$f^{f^{f(z)}(y)}(x) = x + y + z + 1 \; \forall x, y, z \in \mathbb{N}$$



Essa é a reação mais comum quando se vê algum problema parecido com esse, mas veremos que não há motivo para tanto espanto.

Aqui estão algumas das técnicas mais comuns para resolver esse tipo de equação:

- provar que a função é injetora e/ou sobrejetora;
- explorar simetria;
- fazer substituições do tipo $y = f^k(x)$ para algum $k \in \mathbb{N}$;
- tentar substituir valores pequenos (como 1 e 0) na equação original;
- olhar para a órbita de algum inteiro x (a órbita é definida como o menor inteiro positivo orb_x tal que $f^{k+\mathrm{orb}_x}(x) = f^k(x) \, \forall k > K$ para algum $K \in \mathbb{N}$).

Vejamos como resolver o problema apresentado:

Problema. Encontre todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que

$$f^{f^{f(z)}(y)}(x) = x + y + z + 1 \; \forall x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Solução. Seja $P(x, y, z)$ a afirmação dada.

Comecemos provando que f é injetora. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $f(a) = f(b)$. Usando $P(x, y, a)$ e $P(x, y, b)$, temos:

$$\begin{aligned} x + y + a + 1 &= f^{f^{f(a)}(y)}(x) \\ &= f^{f^{f(b)}(y)}(x) \\ &= x + y + b + 1 \,\forall\, x, y \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Assim, $a = b$, o que prova que f é injetora.

Veja que quase conseguimos provar que f é sobrejetora, pois $x + y + z + 1$ pode assumir qualquer valor inteiro ≥ 4 quando variamos x, y, z nos naturais. Será que conseguimos achar um $a \in \mathbb{N}$ tal que $f(a) < 4$? Suponhamos que exista a tal que $f(a) = 1$.

Usando $P(a, a, a)$, temos:

$$1 = 3a + 1 \Rightarrow a = 0$$

gerando um absurdo.

Assim, olhemos para um pouco de simetria. $P(1, y, z)$ e $P(1, z, y)$ nos dizem que:

$$f^{f^{f(z)}(y)}(1) = f^{f^{f(y)}(z)}(1) \,\forall\, y, z \in \mathbb{N}.$$

Lembrando que f é injetora e que não existe a com $f(a) = 1$, concluímos que

$$f^{f(z)}(y) = f^{f(y)}(z) \,\forall\, y, z \in \mathbb{N}.$$

Agora podemos plugar $y \leftarrow 1$ e $z \leftarrow f^{k-1}(1)$ na equação anterior para concluirmos que

$$f^{f^{k}(1)} = f^{f(1)+k-1}(1) \Rightarrow f^{k}(1) = f(1) + k - 1 \,\forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Olhando para $P(1, 1, z)$ e utilizando a última equação, vemos que

$$\begin{aligned} 3 + z &= f^{f^{f(z)}(1)}(1) \\ &= f(1) + f^{f(z)}(1) - 1 \\ &= 2f(1) + f(z) - 2 \\ &\Rightarrow f(z) = z + 5 - 2f(1) \,\forall\, z \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Plugando $z \leftarrow 1$, temos que $f(1) = 2$ e daí $f(z) = z + 1 \,\forall\, z \in \mathbb{N}$. É fácil ver que essa função satisfaz a equação original .

Colocando a mão na massa

Aquecimento

Problema 1. Para um inteiro ímpar fixo r, ache todas as funções $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tais que $f(m) + f(n) \mid m^r + n^r$ $\forall\, m, n \in \mathbb{Z}^+$

Problema 2. Determine todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que, para todos os inteiros a e b,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$

Problema 3. Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ tais que

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

para todos os inteiros positivos m e n.

Problema 4. Ache todas as funções $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, tais que, para todos os inteiros positivos m, n, temos

$$f^{f(n)}(m) + mn = f(m)f(n)$$

onde $f^k(n) = \underbrace{f(f(\dots f(}_{k}n)\dots))$.

Problema 5. Ache todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que, para todos os inteiros positivos m, n, as seguintes duas condições são equivalentes:

- n divide m.
- $f(n)$ divide $f(m) - n$.

Problema 6. Determine todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que

$$m \mid f(n) \iff f(m) \mid n$$

$\forall\, m, n \in \mathbb{N}$.

Problemas

Problema 1. Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfaz que, para todos os naturais m e n, exatamente um entre os $f(n)$ números

$$f(m+1), f(m+2), \dots, f(m+f(n))$$

é divisível por n. Prove que $f(n) = n$ para infinitos valores de n.

Problema 2. Determine todas as funções $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tais que $a^2 + f(a)f(b)$ é divisível por $f(a) + b$ para todos os inteiros positivos a, b.

Problema 3. Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfaz a equação

$$\underbrace{f(f(\dots f}_{f(n)\text{ vezes}}(n)\dots)) = \frac{n^2}{f(f(n))}$$

para todos os inteiros positivos n. Determine todos os possíveis valores de $f(1000)$.

Problema 4. Determine todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ satisfazendo

$$f\big(f(m) + n\big) + f(m) = f(n) + f(3m) + 2014$$

para todos os inteiros m e n.

Problema 5. Ache todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que, para todos os inteiros positivos m e n, o inteiro $f(m) + f(n) - mn$ é não nulo e divide $mf(m) + nf(n)$.

Problema 6. Determine todas as funções $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, satisfazendo as 3 condições:

(i) $f(n) \neq 0$ para, pelo menos, um valor de n;

(ii) $f(xy) = f(x) + f(y)$ para todos os inteiros positivos x e y;

(iii) existem infinitos inteiros positivos n tais que $f(k) = f(n - k)$ para todo $k < n$.

Problema 7. Ache todas as funções $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ tais que $a + f(b)$ divide $a^2 + bf(a)$ para todos os inteiros positivos a e b com $a + b > 2019$.

Problema 8. Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tais que, para todos os inteiros positivos m, n com $m \geq n$,

$$f(m\varphi(n^3)) = f(m) \cdot \varphi(n^3).$$

Problema 9. Seja $f : \{1, 2, 3, \ldots\} \to \{2, 3, \ldots\}$ uma função tal que $f(m + n)|f(m) + f(n)$ para todos os pares m, n de inteiros positivos. Prove que existe um inteiro positivo $c > 1$ que divide todos os valores de f.

Problema 10. Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tais que

$$m^2 + f(n)^2 + (m - f(n))^2 \geq f(m)^2 + n^2$$

para todos os pares de inteiros positivos (m, n).

Desafios

Problema 1. Determine todas as funções $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ satisfazendo

$$f\left(\frac{f(x) + a}{b}\right) = f\left(\frac{x + a}{b}\right)$$

para todo $x \in \mathbb{Q}$, $a \in \mathbb{Z}$, e $b \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Problema 2. Ache todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ satisfazendo

$$f^{a^2+b^2}(a + b) = af(a) + bf(b)$$

para todos os inteiros a e b.

Problema 3. Seja $a_1, a_2, a_3, \ldots$ uma sequência infinita de inteiros positivos tal que a_{n+2m} divide $a_n + a_{n+m}$ para todos os inteiros positivos n e m. Prove que a sequência é eventualmente periódica, ou seja, existem inteiros positivos N e d tais que $a_n = a_{n+d}$ para todo inteiro $n > N$.