

Max-flow, min-cut

Rafael Miyazaki - rafaelkmiyazaki@gmail.com

Recife, 21 de Julho de 2022

Problema 1 (TST Mongólia) Sejam n e d inteiros positivos satisfazendo $d < \frac{n}{2}$. Em um grafo (A, B) -bipartido, cada vértice tem grau menor ou igual a d e $|A| = |B| = n$. Prove que existe uma maneira de acrescentar arestas ao grafo de maneira a torna-lo $2d$ -regular.

Problema 2 (TST Índia) Em uma mesa estão colocadas 2019 moedas, algumas das quais estão mostrando sua face cara e algumas sua face coroa. Um grupo de 2019 pessoas realiza as seguintes operações: a primeira pessoa escolhe uma moeda qualquer e a vira, a segunda escolher duas moedas quaisquer e as vira, e assim sucessivamente até que a última pessoa vira todas as moedas. Prove que independentemente de como as moedas estejam dispostas inicialmente, as 2019 pessoas podem organizar uma maneira de realizar as operações a fim de que todas as moedas mostrem a mesma face ao final do processo.

Problema 3 (TST Peru) Tivalu possui 10 cidades, chamadas H_1, H_2, \dots, H_{10} , e algumas delas são ligadas por estradas de mão dupla. Sabe-se que é possível chegar de H_1 a H_{10} utilizando algumas dessas estradas. Mostre que uma das situações abaixo ocorre:

1. Existe um caminho ligando H_1 a H_{10} utilizando no máximo 3 estradas.
2. Existem duas cidades H_i e H_j , $2 \leq i < j \leq 9$, tais que todo caminho ligando H_1 a H_{10} passa por H_i ou H_j .

Problema 4 O reino de Anisotropia consiste de n cidades. Para cada par de cidades no reino, existe exatamente uma estrada entre elas com apenas um sentido permitido. Dizemos que um caminho de X para Y é uma sequência de estradas tal que alguém pode ir da cidade X para a cidade Y através dessa sequência sem passar duas vezes pela mesma cidade. Uma coleção de caminhos é chamada de diversa se nenhuma estrada pertence a dois ou mais caminhos da coleção.

Sejam A e B duas cidades distintas em Anisotropia. Defina N_{AB} como a quantidade máxima de caminhos em uma coleção diversa de caminhos de A para B . Analogamente, N_{BA} é a quantidade máxima de caminhos em uma coleção diversa de caminhos de B para A . Demonstre que $N_{AB} = N_{BA}$ se e somente se o número de estradas saindo de A e o número de estradas saindo de B são iguais.