

Semana Olímpica

**Modelando fenômenos que não acontecem
instantaneamente**



Jaqueline Godoy Mesquita
Universidade de Brasília





Objetivos

**Integral de
Kurzweil e as EDOs
Generalizadas**

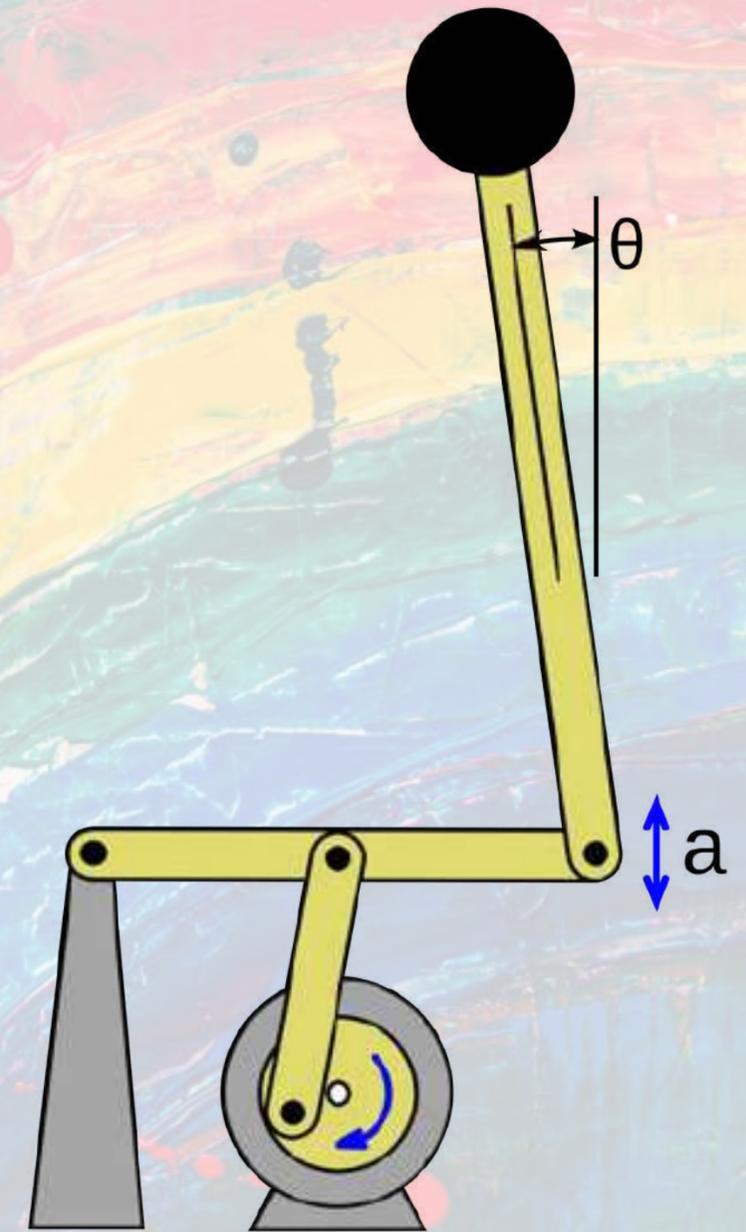
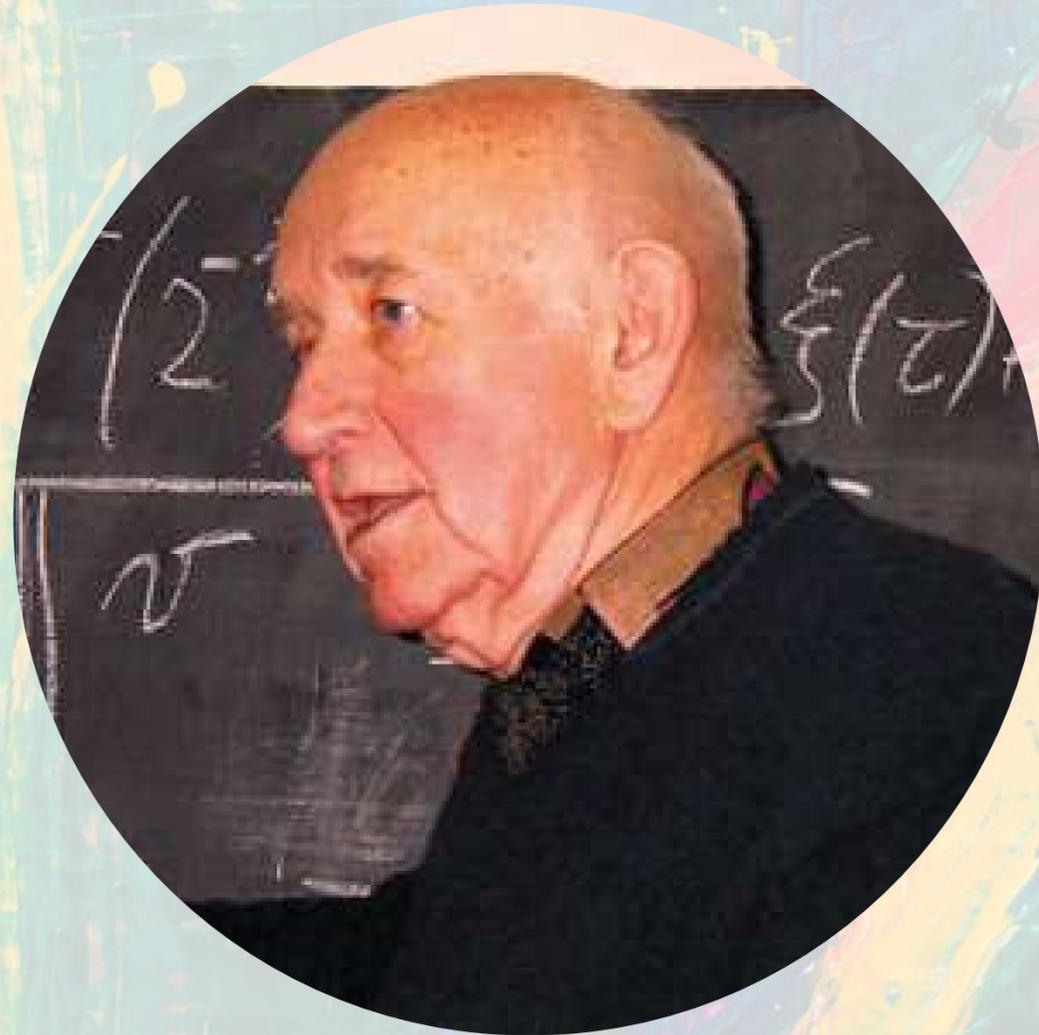
**Equações
Diferenciais com
Retardos**

**Equações Dinâmicas
em Escalas
Temporais**

Método da Média

Integral de Kurzweil e as EDOs generalizadas

Jaroslav Kurzweil & Pêndulo de Kapitza



Jaroslav Kurzweil & Ralph Henstock



Exemplo

Defina $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(t) = \begin{cases} t^2 \cos\left(\frac{\pi}{t^2}\right), & t \in (0, 1]; \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

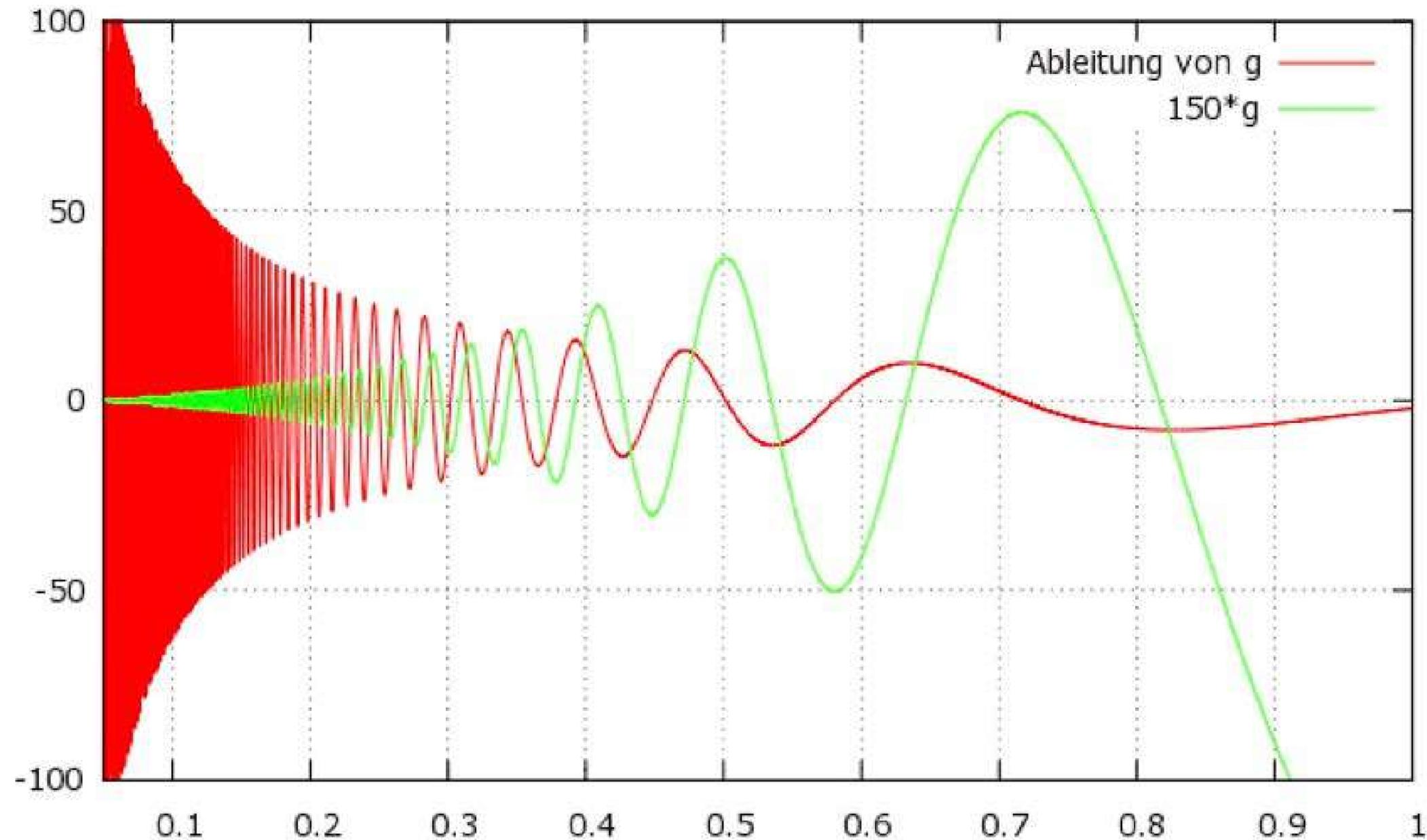
Calculando f' :

$$f'(t) = \begin{cases} 2t \cos\left(\frac{\pi}{t^2}\right) + \frac{2\pi}{t} \sin\left(\frac{\pi}{t^2}\right), & t \in (0, 1]; \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$



f' não é Lebesgue integrável

f' é Kurzweil-Henstock integrável (=Perron integrável)



Integral de Kurzweil



Divisão Marcada

Uma **divisão marcada** de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é uma coleção finita de pares ponto-intervalo $(\tau_i, [s_{i-1}, s_i])$, com

$$a = s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_k = b \quad \text{e} \quad \tau_i \in [s_{i-1}, s_i],$$

para $i = 1, 2, \dots, |D|$.

Integral de Kurzweil



Calibres

Dada uma função $\delta : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$ (chamada **calibre** de $[a, b]$), uma divisão marcada $D = (\tau_i, [s_{i-1}, s_i])$ é **δ -fina**, sempre que

$$[s_{i-1}, s_i] \subset (\tau_i - \delta(\tau_i), \tau_i + \delta(\tau_i)),$$

para $i = 1, 2, \dots, |D|$.

Integral de Kurzweil



A Integral de Kurzweil

Uma função $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$ é dita **Kurzweil integrável** em $[a, b]$, se $\exists! I \in X$ tal que $\forall \varepsilon > 0$, \exists um calibre δ de $[a, b]$ tal que \forall divisão marcada δ -fina $d = (\tau_i, [s_{i-1}, s_i])$ de $[a, b]$,

$$\left\| \sum_i [U(\tau_i, s_i) - U(\tau_i, s_{i-1})] - I \right\| < \varepsilon.$$

Neste caso, $I = \int_a^b DU(\tau, t)$.

Lema de Cousin

Dado um calibre δ de $[a, b]$, existe uma divisão marcada δ -fina de $[a, b]$.

EDOs generalizadas



Stefan Schwabik

EDOs generalizadas

Seja X um espaço de Banach, $O \subset X$ aberto $[\alpha, \beta] \subset [a, +\infty)$ e $\Omega = O \times [\alpha, \beta]$.

Definição

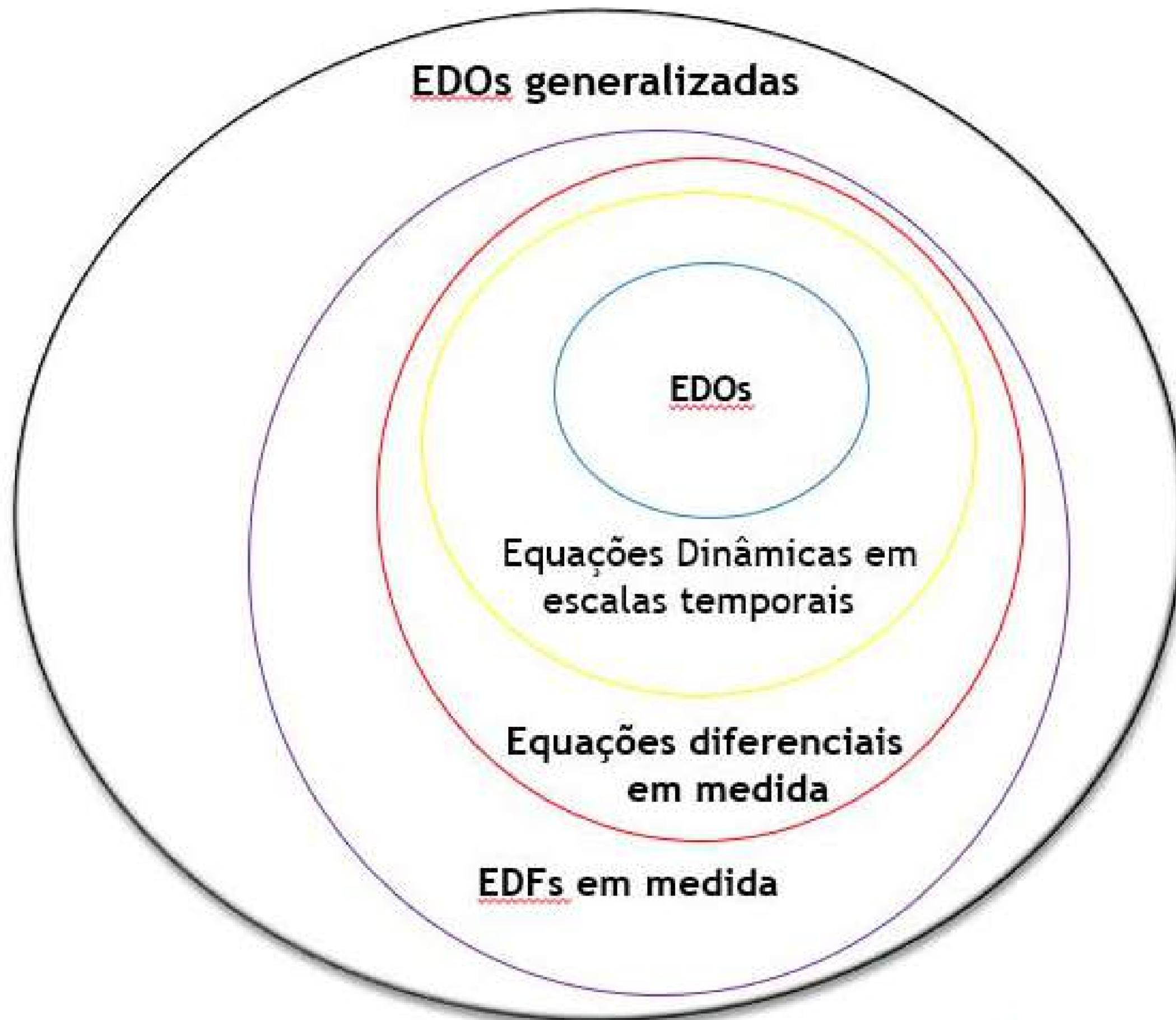
Uma função $x : [\alpha, \beta] \rightarrow X$ é **uma solução** em $[\alpha, \beta]$ da EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x, t),$$

sempre que $(x(t), t) \in \Omega \forall t \in [\alpha, \beta]$ e

$$x(v) = x(\gamma) + \int_{\gamma}^v DF(x(\tau), t), \quad \gamma, v \in [\alpha, \beta].$$





EDOs generalizadas

EDOs

Equações Dinâmicas em
escalas temporais

Equações diferenciais
em medida

EDFs em medida

Equações Dinâmicas em Escalas Temporais



Teoria de escalas temporais



"A major task of mathematics today is to harmonize the continuous and the discrete, to include them in one comprehensive mathematics, and to eliminate obscurity from both."

Eric Temple Bell, Men of Mathematics

● 1988



Bernd Aulbach (1947-2005)



Stefan Hilger

Uma **escala temporal** é um subconjunto fechado e não-vazio da reta

Martin Bohner

(Missouri University of Science and Technology)

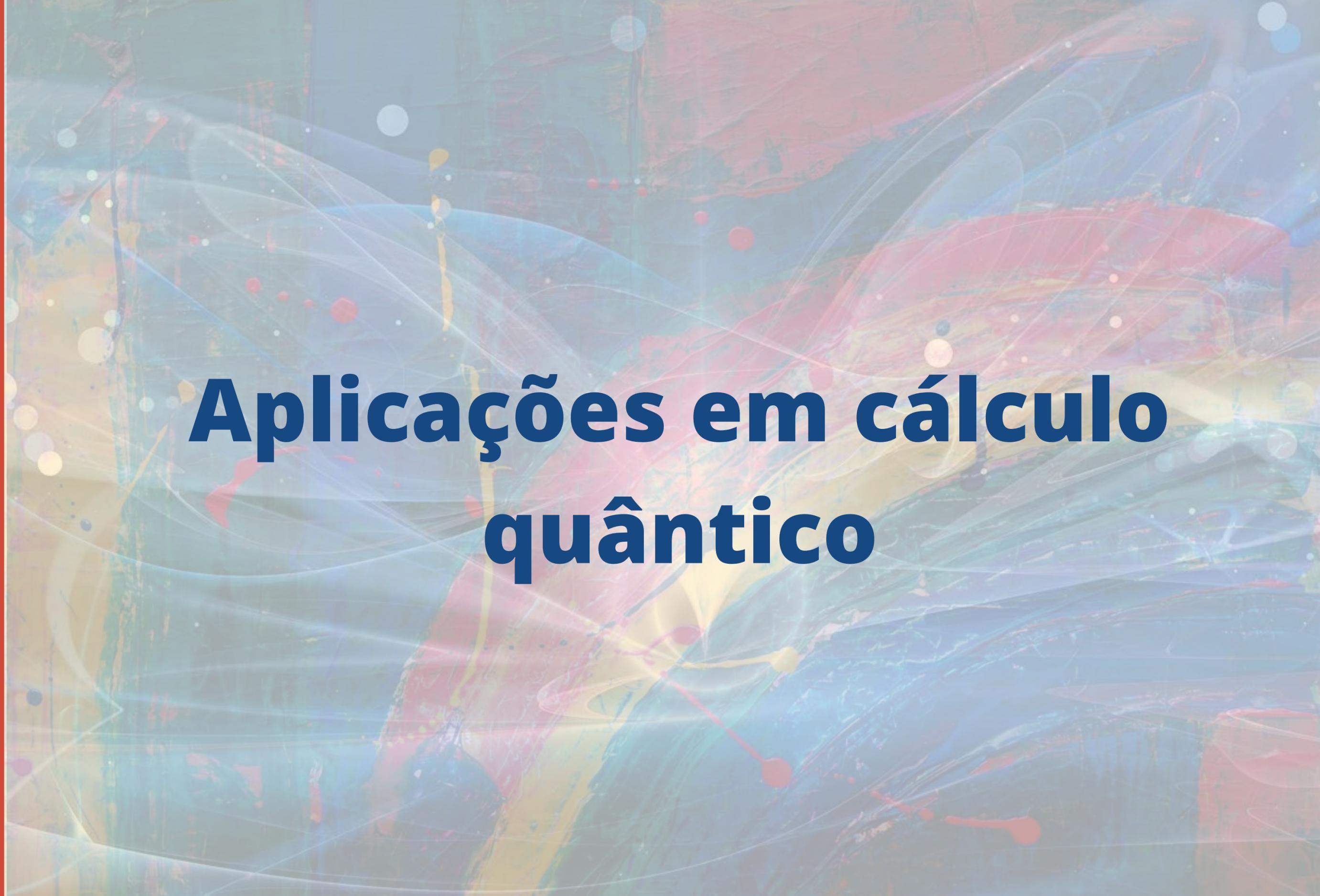


Motivação

- **Unificar casos contínuos e discretos**
- **Unificar outros casos dependendo da escala temporal escolhida**
- **Aplicações**



Aplicações em cálculo quântico



Referências

ADVANCES IN
DYNAMIC
EQUATIONS
ON TIME
SCALES

Martin Bohner
Allan Peterson
Editors

$$x' = f(t, x)$$

$$x_{\Delta} = f(t, x)$$

$$x^{\sigma} = f(t, x)$$

$$x^{\rho} = f(t, x)$$

$$x^{\nabla} = f(t, x)$$

Birkhäuser

DYNAMIC
EQUATIONS
ON
TIME SCALES

AN INTRODUCTION WITH APPLICATIONS

MARTIN BOHNER,
ALLAN PETERSON

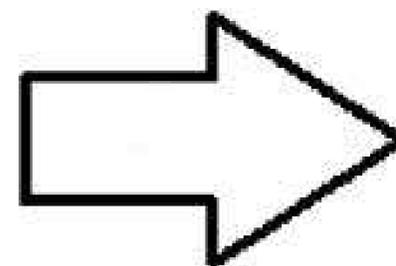
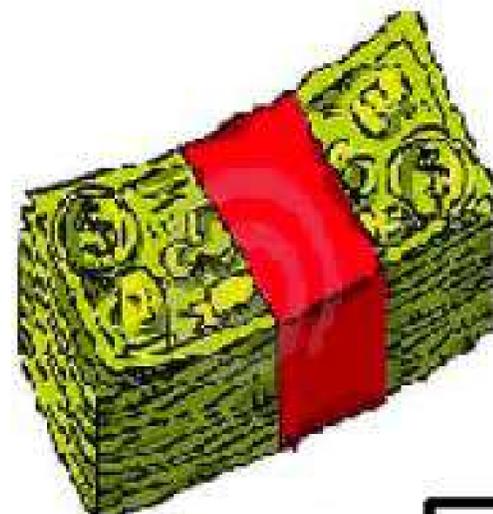
BIRKÄUSER

Copyright 2001

Aplicações em situações cotidianas:



Salário recebido todo mês



Ganha um dinheiro inesperadamente em outro momento diferente



Aplicações em modelos de população:

Em certas estações, a população dos ursos tem comportamento contínuo

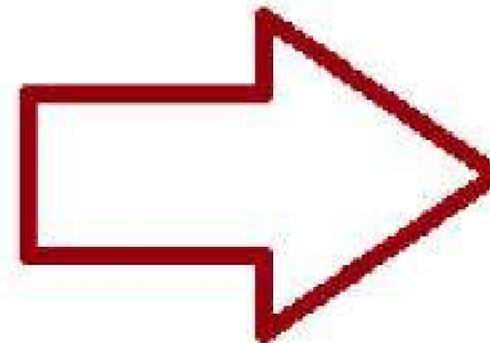
se reproduzem



Nascem



morrem



Em outras estações, a população de ursos fica em estado de hibernação.



Uma escala temporal é um subconjunto fechado e não-vazio dos números reais.

Notação: \mathbb{T} , $[a, b]_{\mathbb{T}}$.

Exemplos

Conjunto de Cantor, $\{a\}$, $q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$.

Exemplos

\mathbb{R} , \mathbb{Z} , \mathbb{N} , $[a, b]$ para $a, b \in \mathbb{R}$.

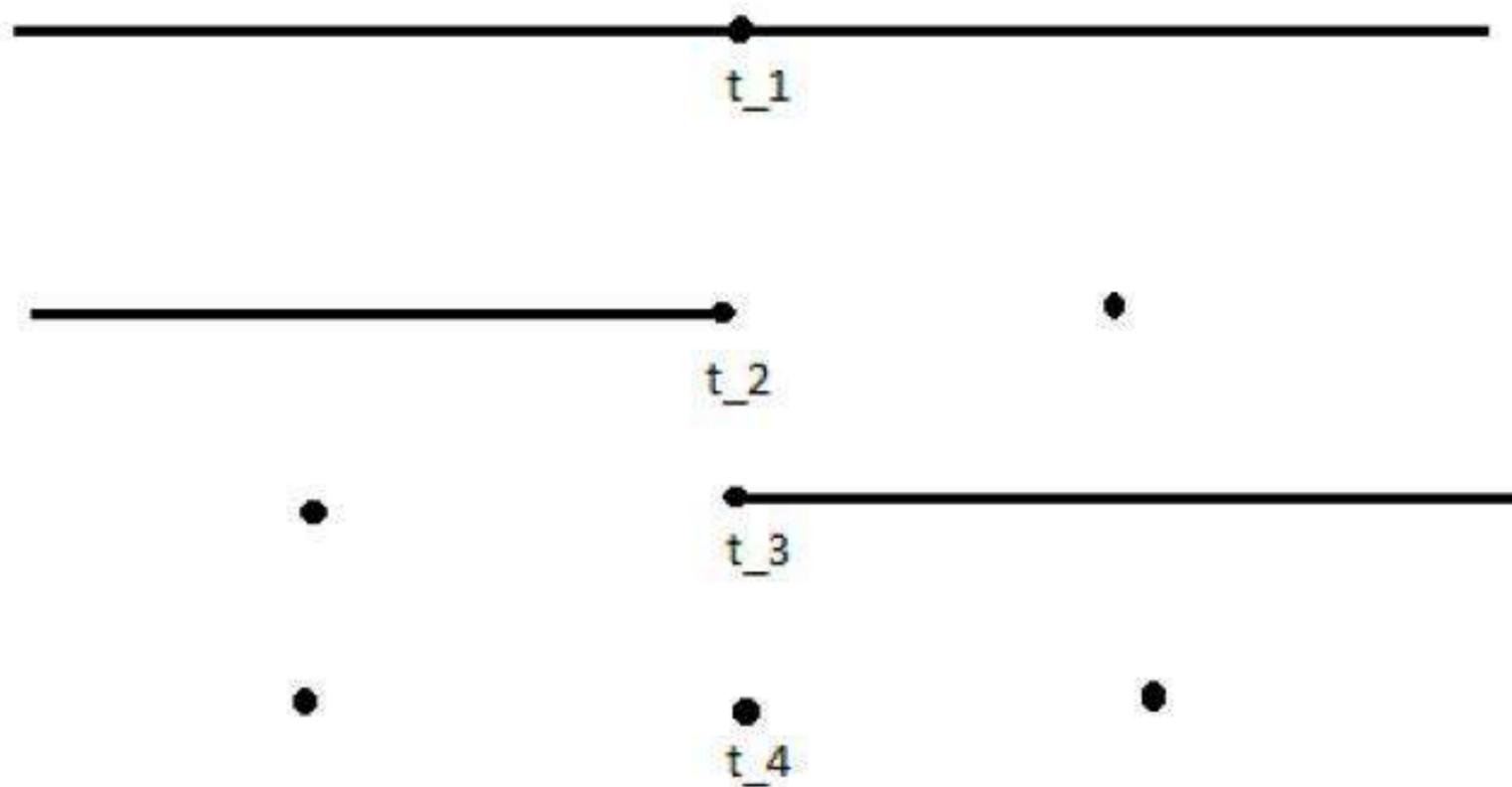
Defina os seguintes operadores:

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T}; s < t\} \text{ e } \sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}; s > t\},$$

onde ρ é chamado *operador de recuo* e σ é dito *operador de avanço*.

Definição	t
denso a direita	$\sigma(t) = t$
discreto a direita	$\sigma(t) > t$
denso a esquerda	$\rho(t) = t$
discreto a esquerda	$\rho(t) < t$

- (i) t_1 é denso a direita e denso a esquerda ao mesmo tempo;
- (ii) t_2 é denso a esquerda e discreto a direita;
- (iii) t_3 é denso a direita e discreto a esquerda;
- (iv) t_4 é discreto a direita e discreto a esquerda ao mesmo tempo;





Definimos a função *rarefação* $\mu : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$ por

$$\mu(t) := \sigma(t) - t.$$



Exemplos



R _____

Z • • • • • • • • • •

hZ • • • • • • • • • • • • • • • • • •

P _____



Exercício

Considere a seguinte escala temporal

$$\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}}.$$

- (i) Encontre $\sigma(t)$;
- (ii) Encontre $\mu(t)$;
- (iii) Classifique os pontos como denso a direita, denso a esquerda, discreto a direita, discreto a esquerda.



Exercício

Considere a seguinte escala temporal

$$\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^2 = \{n^2 : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

- (i) Encontre $\sigma(t)$;
- (ii) Encontre $\mu(t)$;
- (iii) Classifique os pontos como denso a direita, denso a esquerda, discreto a direita, discreto a esquerda.

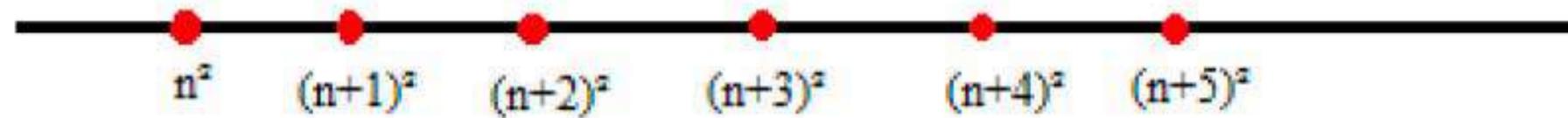


Resposta:

- (i) $\sigma(t) = 2t$;
- (ii) $\mu(t) = 2t - t = t$;
- (iii) Os pontos são discretos a direita, pois $\sigma(t) > t$.

Resposta: Seja

$$\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^2 = \{n^2 : n \in \mathbb{N}_0\}.$$



Então,

$$\sigma(n^2) = (n+1)^2$$

$$\mu(n^2) = \sigma(n^2) - n^2 = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1.$$



Definição

Seja $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, então definimos a função $f^\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ como segue

$$f^\sigma(t) = f(\sigma(t)), \quad t \in \mathbb{T},$$

ou seja, $f^\sigma = f \circ \sigma$.

Propriedade 1:

- 1 Se f, g são Δ -diferenciáveis, então $f + g$ é delta diferenciável e

$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t)$$

Propriedade 2:

- 1 Se f, g são Δ -diferenciáveis, então fg é delta diferenciável e

$$(fg)^\Delta(t) = f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t))$$

Propriedade 3:

- 1 Se $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$ e f é Δ -diferenciável, então $\frac{1}{f}$ é Δ -diferenciável e

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\frac{f^\Delta(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$$



Exemplos



Equações Diferenciais com Retardos



The background features a light-colored, cracked wall texture. A large, faint target with concentric circles and a vertical line is centered. Three white arrows with blue fletching are positioned horizontally across the target. A large, semi-transparent blue outline of a shield or crest is overlaid on the target.

Retrospectiva

Marquis of Condorcet (1743-1794)

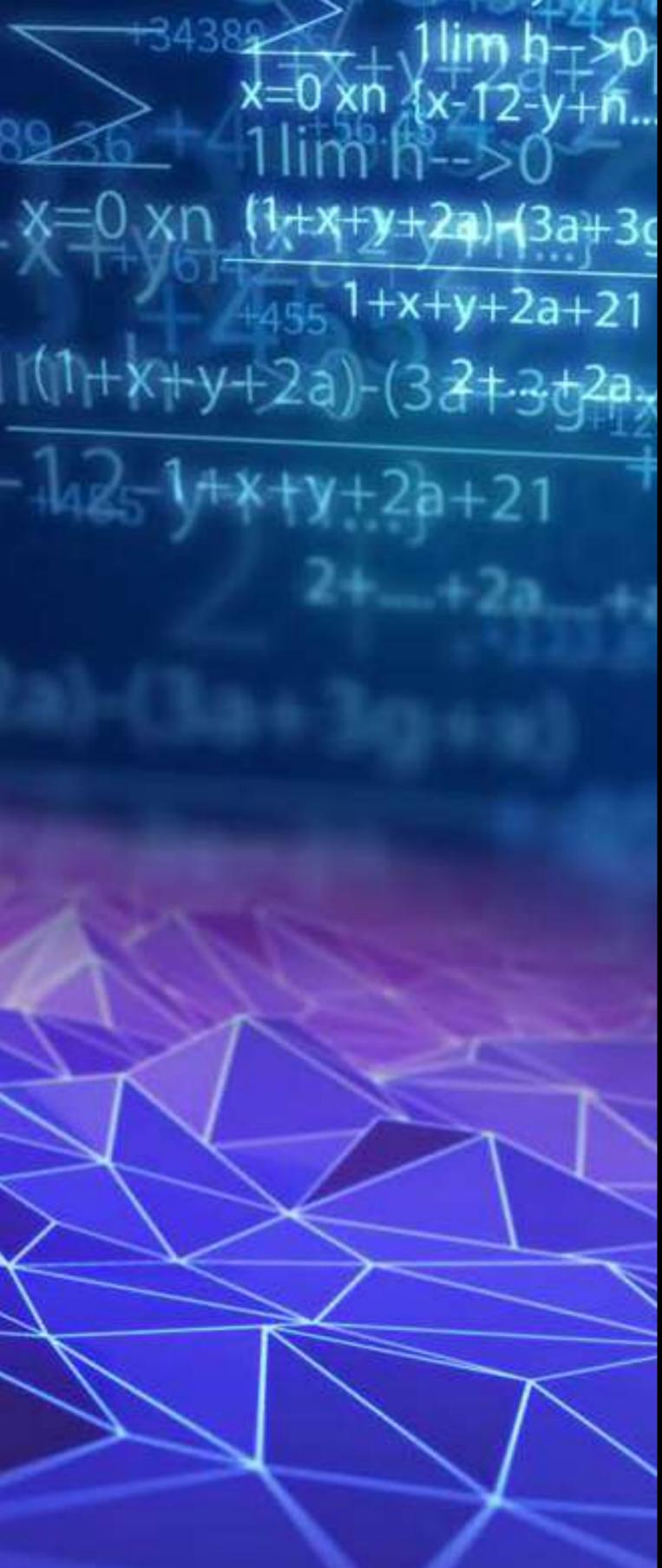
Des Équations aux differences finies & infiniment petites, 1771



Siméon Denis Poisson (1781-1840)

Sur les équations aux différences mêlées, 1806





Motivação

*"In all biological phenomena it is necessary to examine not only immediate actions but also those depending on the past, that is, on the changes which the species have undergone. These actions were first called hereditary actions; but this name was not well chosen It was found preferable to use the term **historical actions or actions belonging to memory**"*

Vito Volterra (1860-1940)



"As equações diferenciais da mecânica clássica são tais que o movimento é determinado pelo simples conhecimento de posições e velocidades, ou seja, pelo estado em um dado instante e no instante infinitamente próximo. Os estados anteriores não intervêm lá, o hereditário é uma palavra vã lá. A aplicação dessas equações em que o passado não se distingue do futuro, ou onde os movimentos são de natureza reversível, portanto, não são aplicáveis aos seres vivos.

Podemos ter equações funcionais mais complicadas do que as equações clássicas porque elas também conterão integrais obtidas entre um tempo passado distante e o estado atual, que terá a participação do hereditário."

Charles Émile Picard

(1856-1941)



Olga Polossuchina

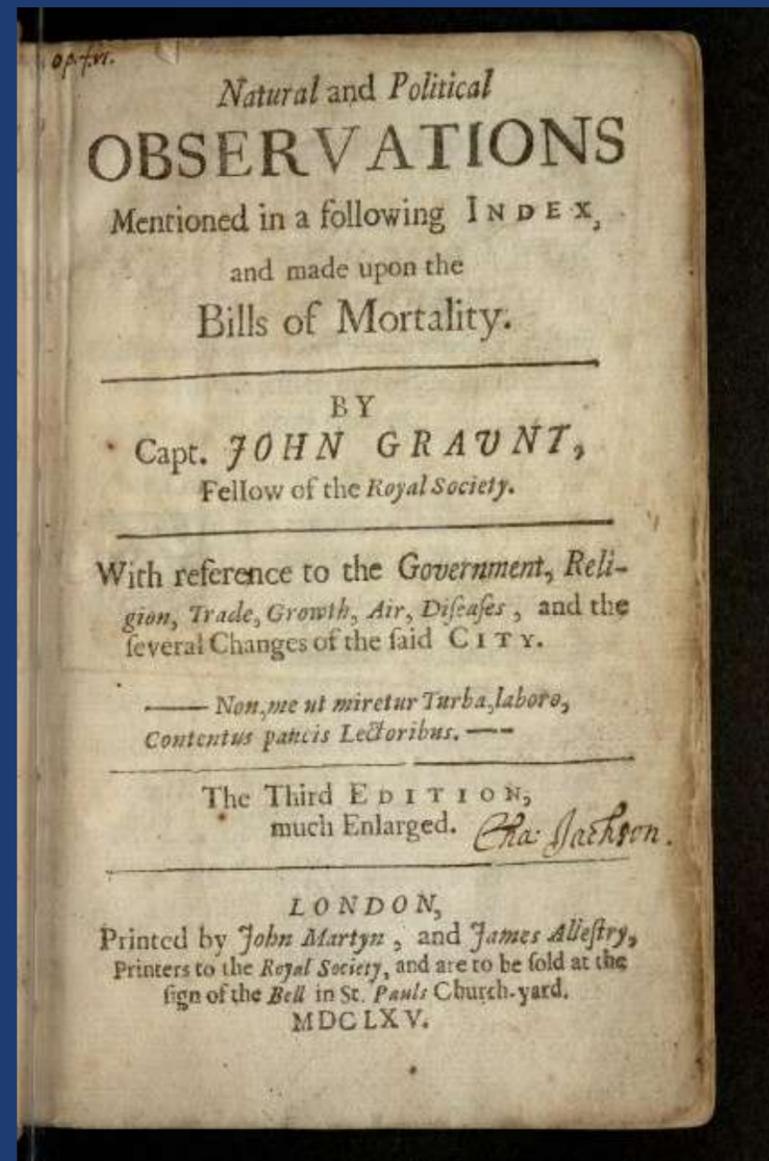
- Terminou sua tese de doutorado em 1910.
- Título da tese: *Sobre uma classe especial de equações diferenciais funcionais.*
- Fez seu doutorado na *Universität Zurich*.



Modelos Populacionais

John Graunt (1662)

Natural and political observations mentioned in a following index and made upon the bills of mortality



Thomas Malthus (1798)

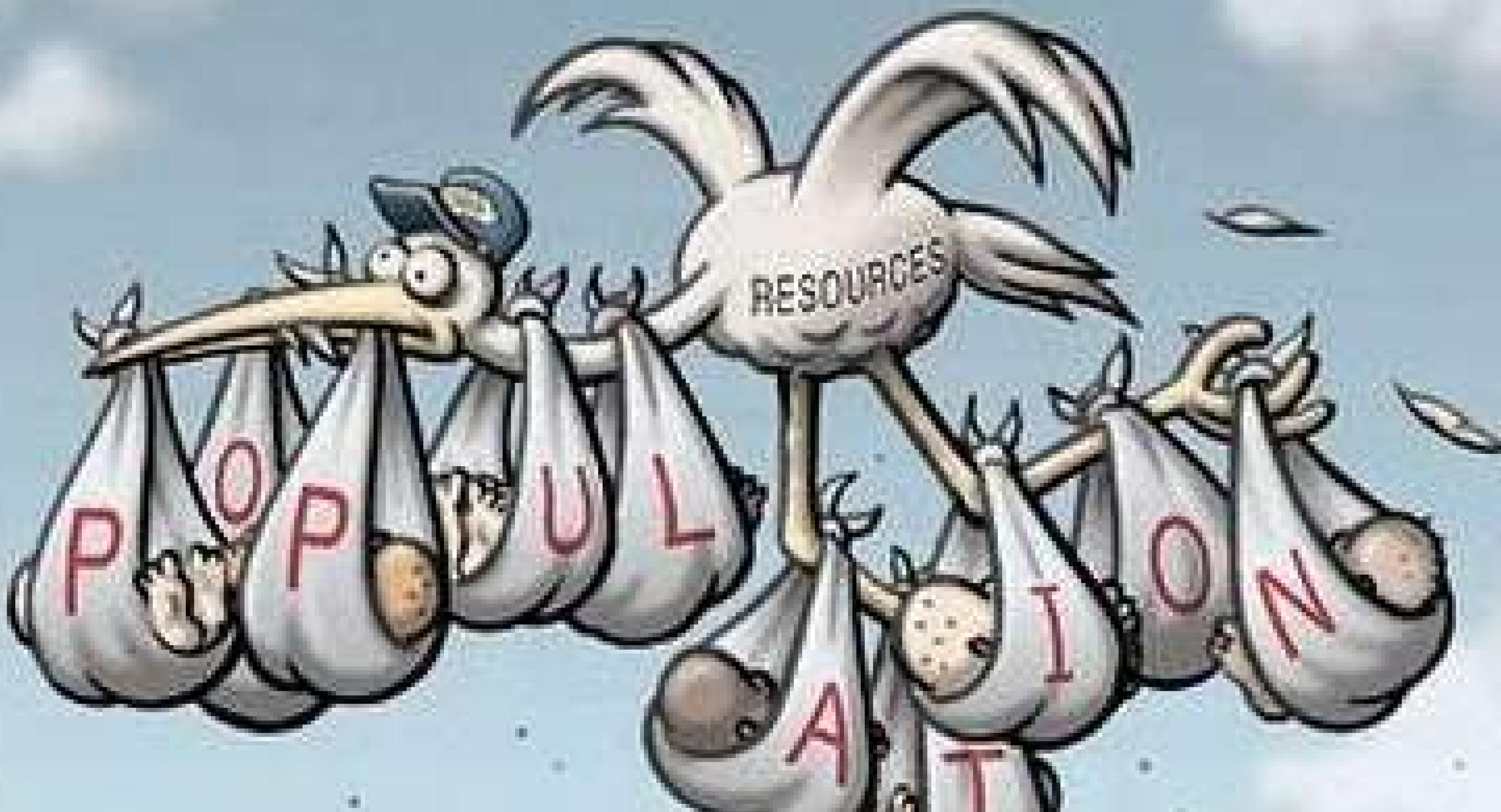
An essay on the principle of population



Modelo Malthusiano

$$\dot{x}(t) = \tilde{b}x(t)$$

onde $x(t)$ é o tamanho da população no instante t e $\tilde{b} > 0$ é a taxa de crescimento da população.



Pierre François Verhulst (1838)

"Population increase must be limited by the size and fertility of the country"

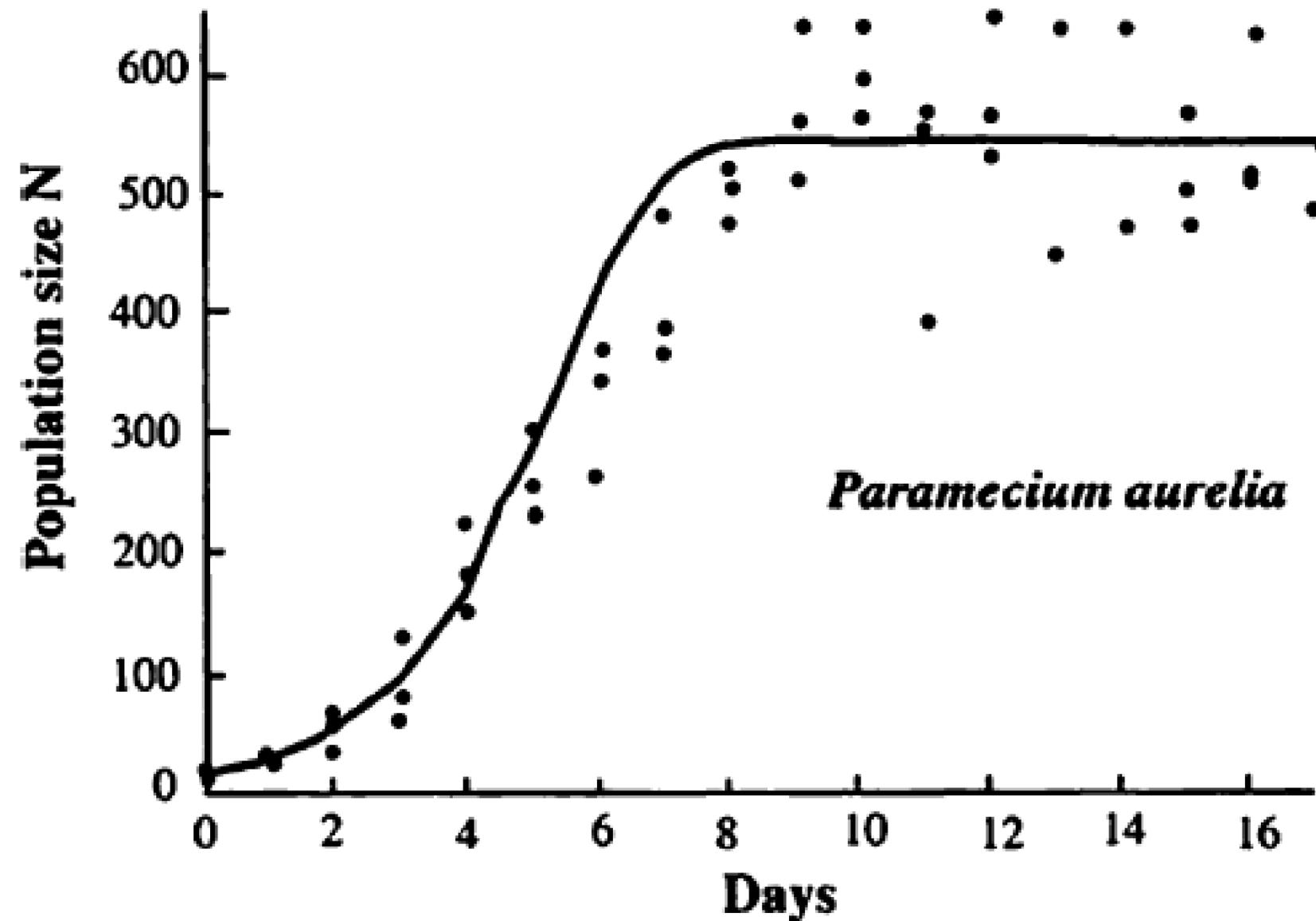


Equação Logística

$$\dot{x}(t) = bx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right)$$

onde $b > 0$ é a taxa de crescimento, $x(t)$ é o tamanho da população no instante t e $K > 0$ é a capacidade máxima do meio ambiente.

Tamanho populacional do protozoário *Paramecium Aurelia* em tubos testes (medido por 0,5ml).



*Figura retirada de T. Erneux, Applied delay differential equations, volume 3 of Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, 2009

Raymond Pearl e Lowell J. Reed (1920)

"On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation"



Alfred James Lotka (1925)



George Evelyn Hutchinson (1948)

"the process of reproduction is not instantaneous"

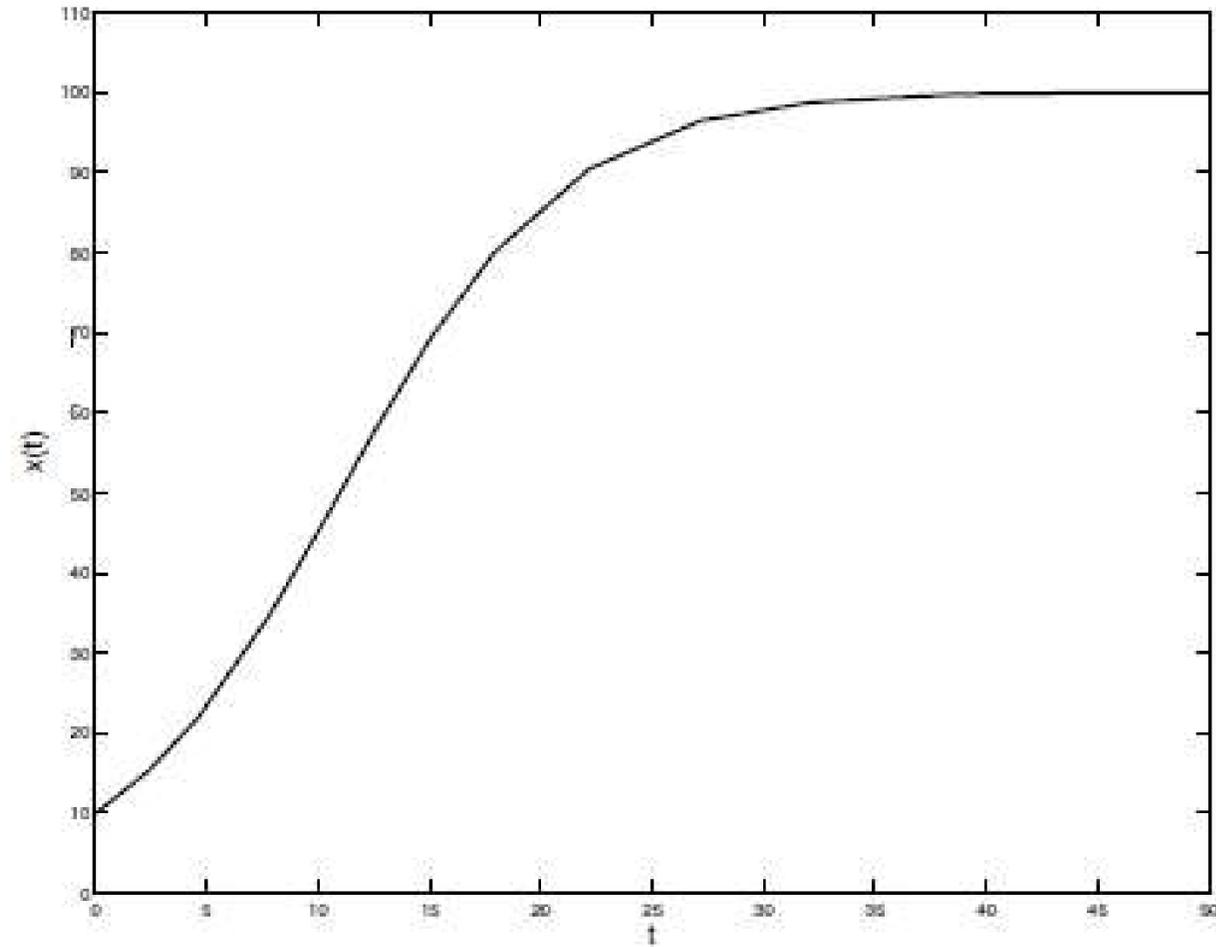


Equação de Hutchinson

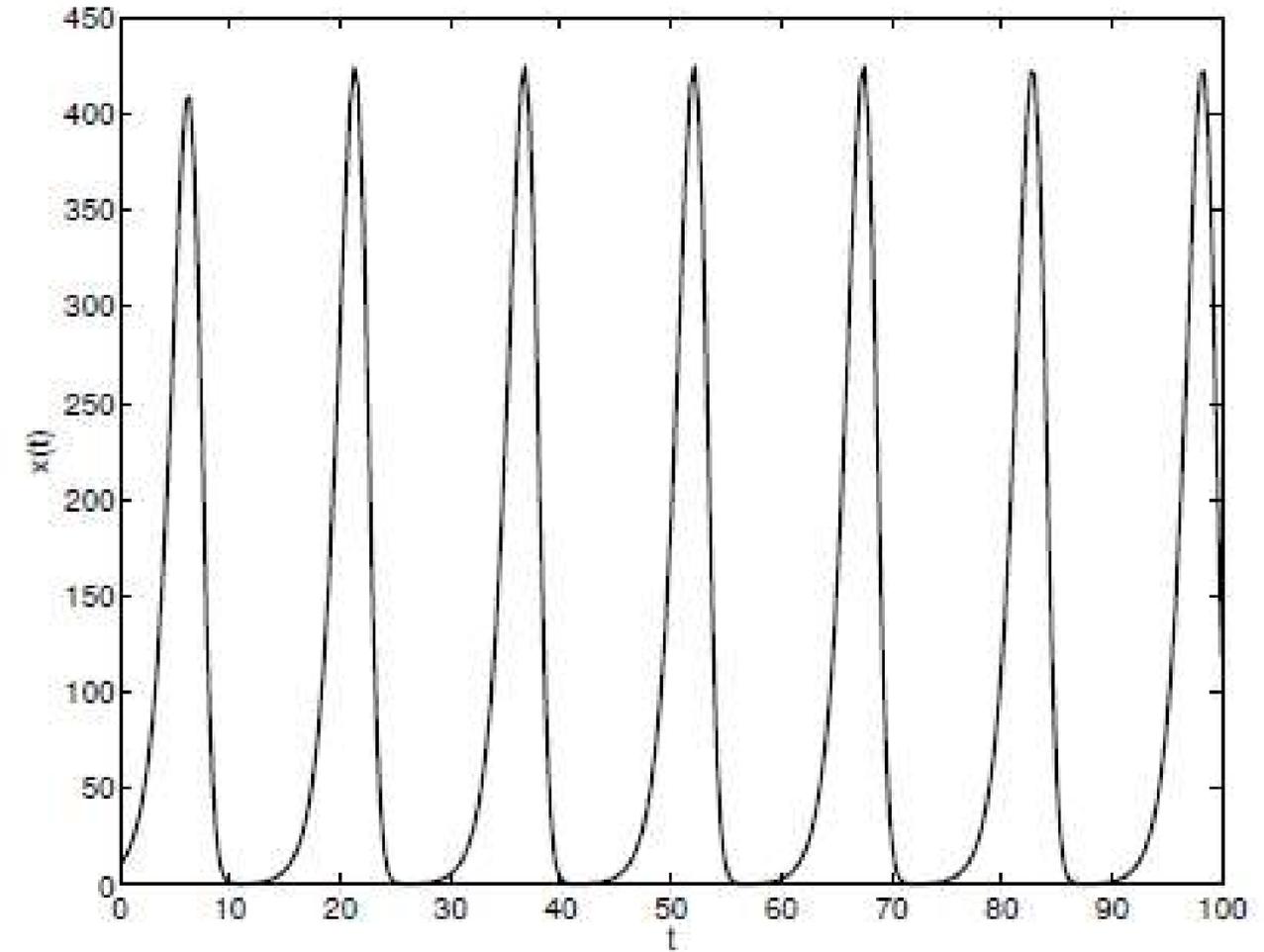
$$\dot{x}(t) = bx(t) \left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K} \right)$$

onde $b > 0$ é a taxa de crescimento, $x(t)$ é o tamanho da população no instante t e $K > 0$ é a capacidade máxima do meio ambiente.

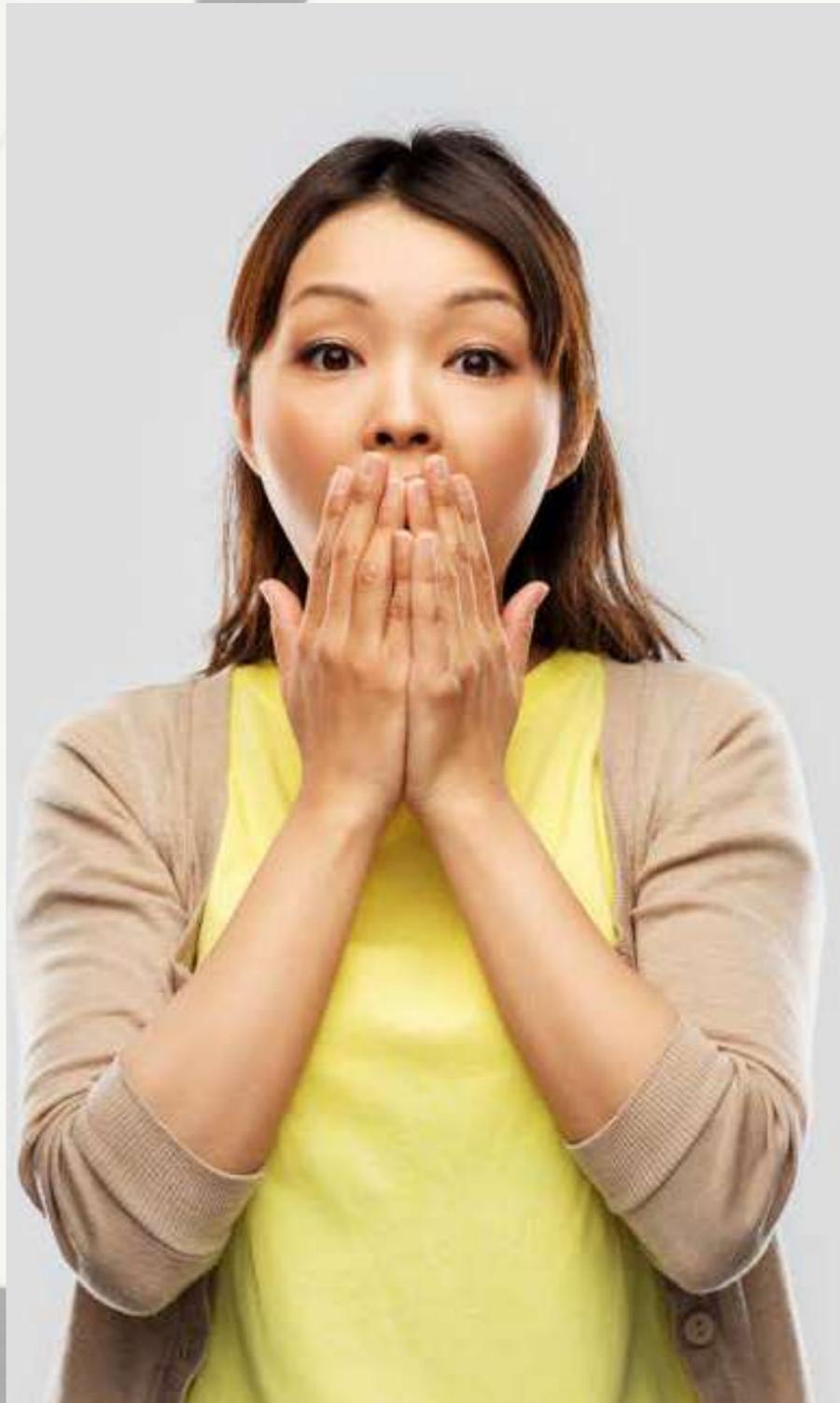
Comparação



(a) *Logistic equation.*



(b) Hutchinson's equation.



Exemplos de populações que oscilam

Ovelhas



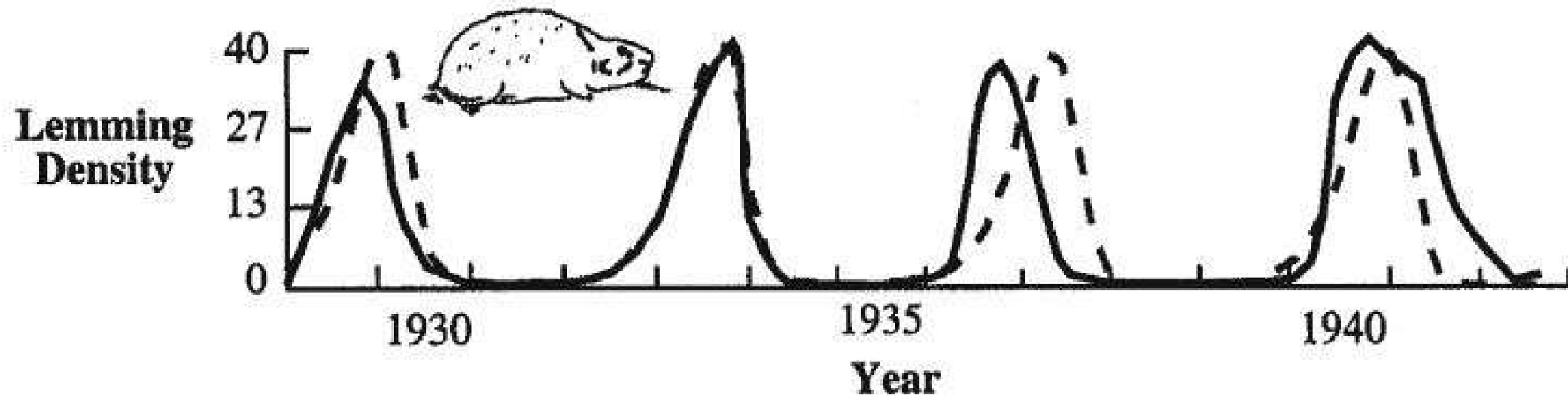
Exemplos de populações que oscilam

—● Moscas Varejeiras *Lucilia cuprina*

—● Plânctons

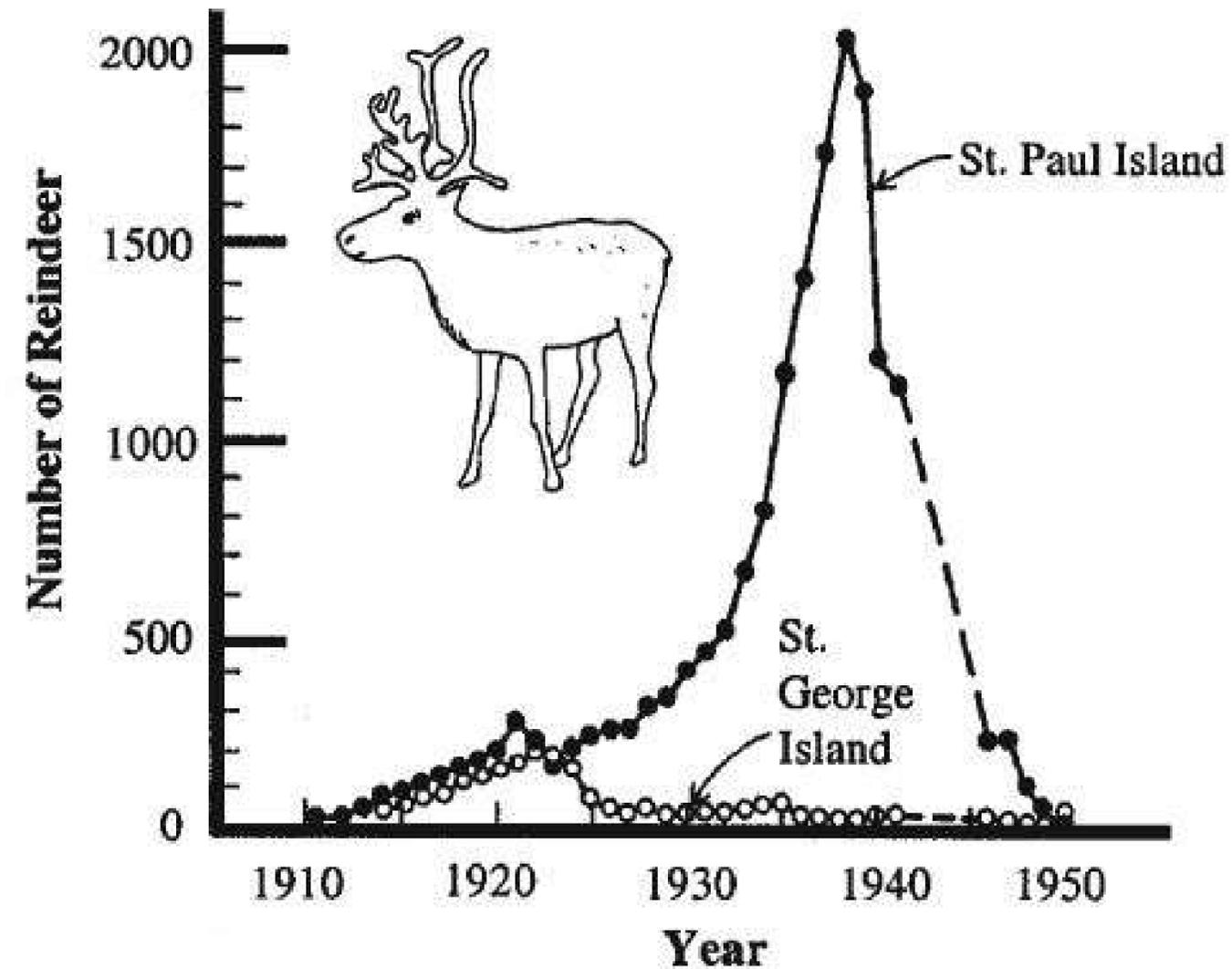
—● Crustáceos *Daphnia*

Exemplos de populações que oscilam



*Figura retirada de T. Erneux, Applied delay differential equations, volume 3 of Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, 2009

Exemplos de populações que oscilam



*Figura retirada de T. Erneux, Applied delay differential equations, volume 3 of Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, 2009

Mas havia um **erro** no modelo de Hutchinson...



Equação de Hutchinson

$$\dot{x}(t) = bx(t) \left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K} \right)$$

onde $b > 0$ é a taxa de crescimento, $x(t)$ é o tamanho da população no instante t e $K > 0$ é a capacidade máxima do meio ambiente.

Alexander John Nicholson

(1895-1969)

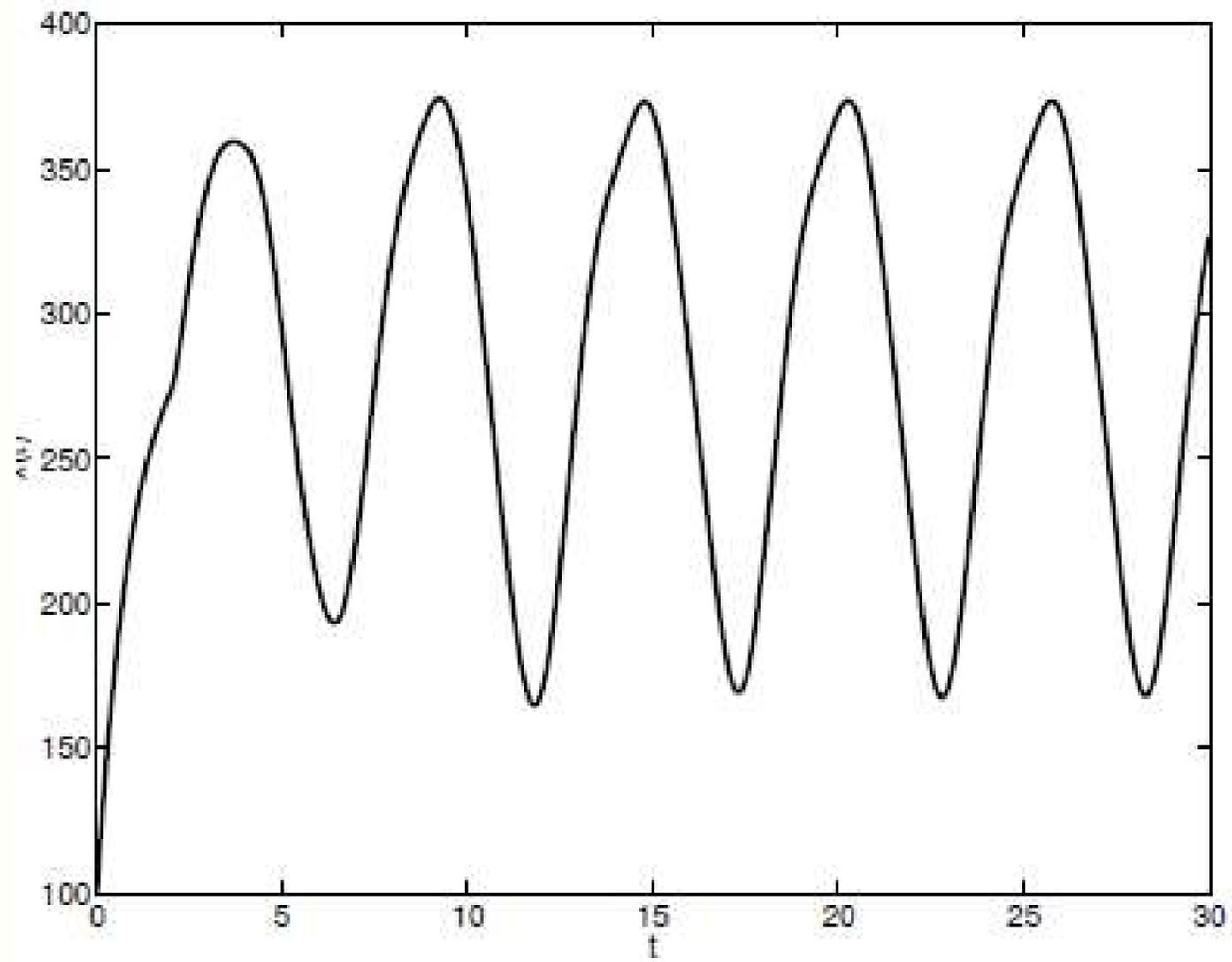


Perez, Malta e Coutinho (1978)

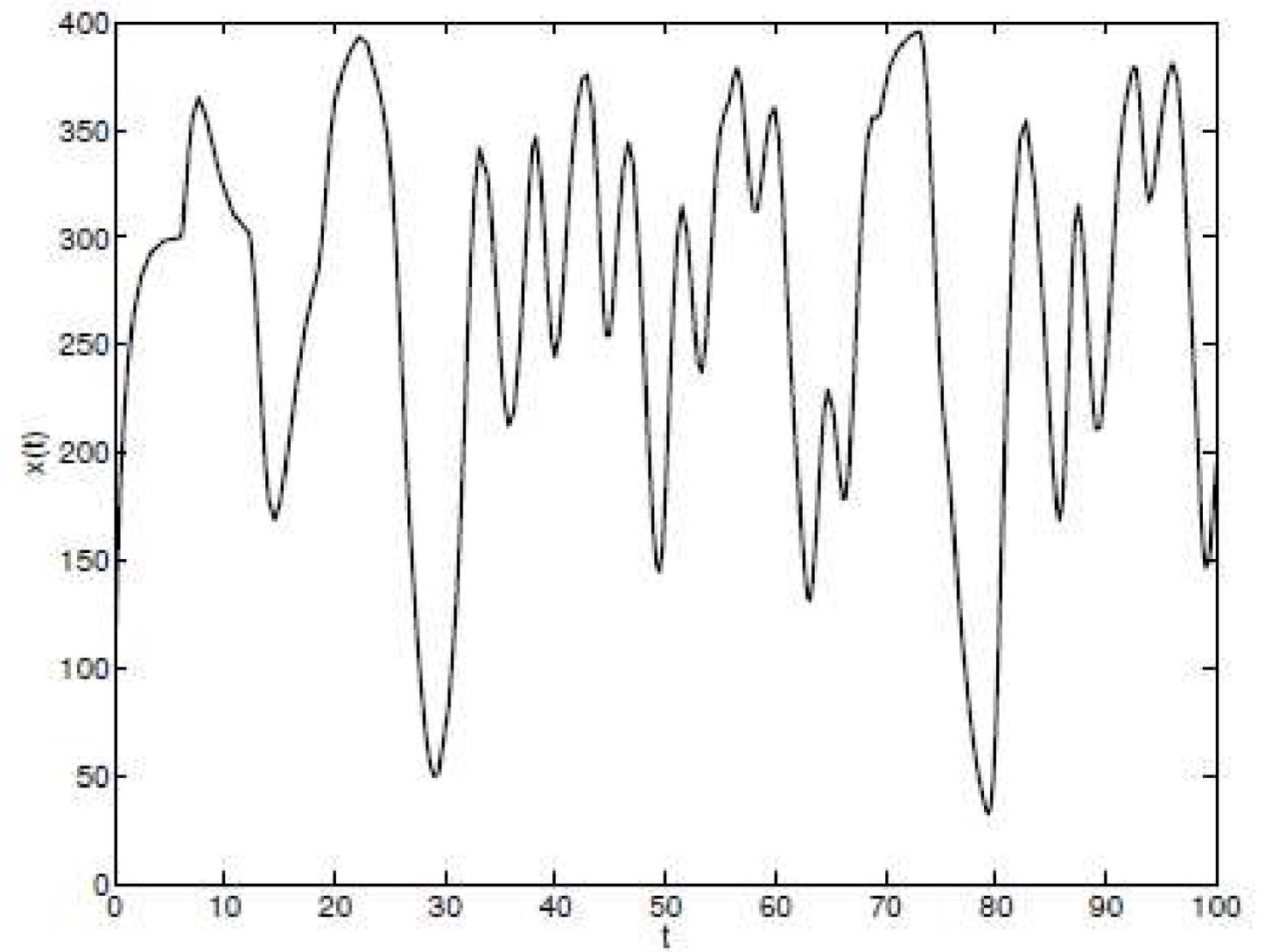


Equação de Blowfly

$$\dot{x}(t) = b(x(t - \tau))x(t - \tau) - \mu(x(t))x(t)$$



(a) $\tau = 2$.



(b) $\tau = 6$.

"It was observed that for Antarctic whale and seal populations, the length of time to maturity is a function of the amount of food (mostly krill) available. Prior to World War II, it was observed that individual seals took five years to mature, small whales took seven to ten years, and large whale species took twelve to fifteen years to reach maturity. Subsequent to the introduction of factory ships after the war, and with it a depletion of the large whale populations, there was an increase in the krill available for the seals and the remaining whales. It was then noted that seals took three to four years to mature and small whales now only took five years."

Aiello, Freedman & Wu 1992



Modelo Populacional envolvendo retardo dependendo do estado

$$\dot{x}(t) = \frac{\tilde{b}_1(x(t - \tau(x(t))))e^{-\mu_0\tau(x(t))} - \tilde{\mu}_1(x(t))x(t)}{1 + \dot{\tau}(x(t))\tilde{b}_1(x(t - \tau(x(t))))e^{-\mu_0\tau(x(t))}}$$

Aiello, W. G., Freedman, H. I., and Wu, J. *Analysis of a model representing stage-structured population growth with state-dependent time delay*, SIAM Journal on Applied Mathematics 52(3), pp. 855–869, 1992.

Modelo Populacional envolvendo retardo dependendo do estado

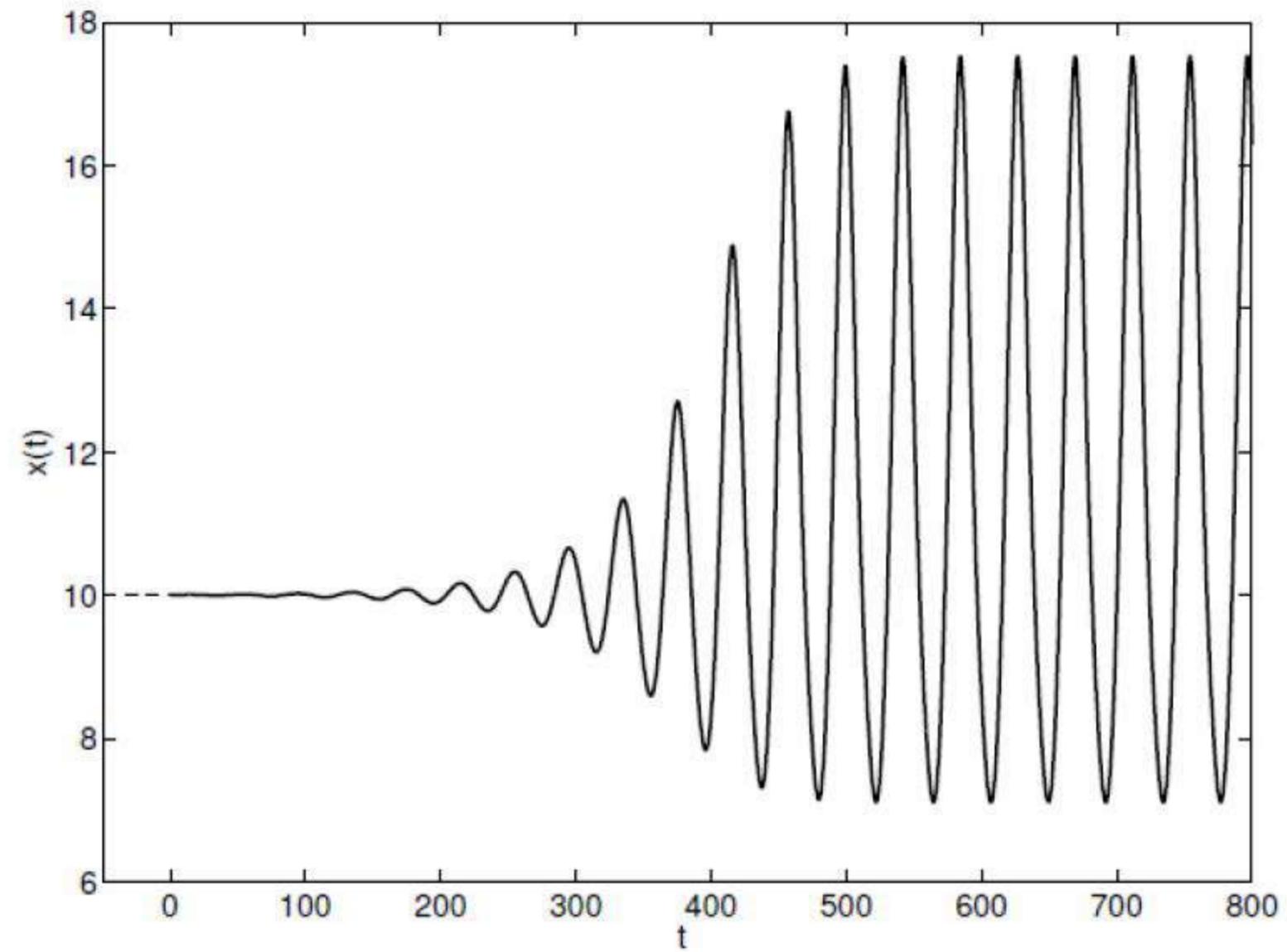
Se $\tau = \tilde{\tau} > 0$, então

$$\dot{x}(t) = b(x(t - \tilde{\tau}))x(t - \tilde{\tau}) - \mu(x(t))x(t),$$

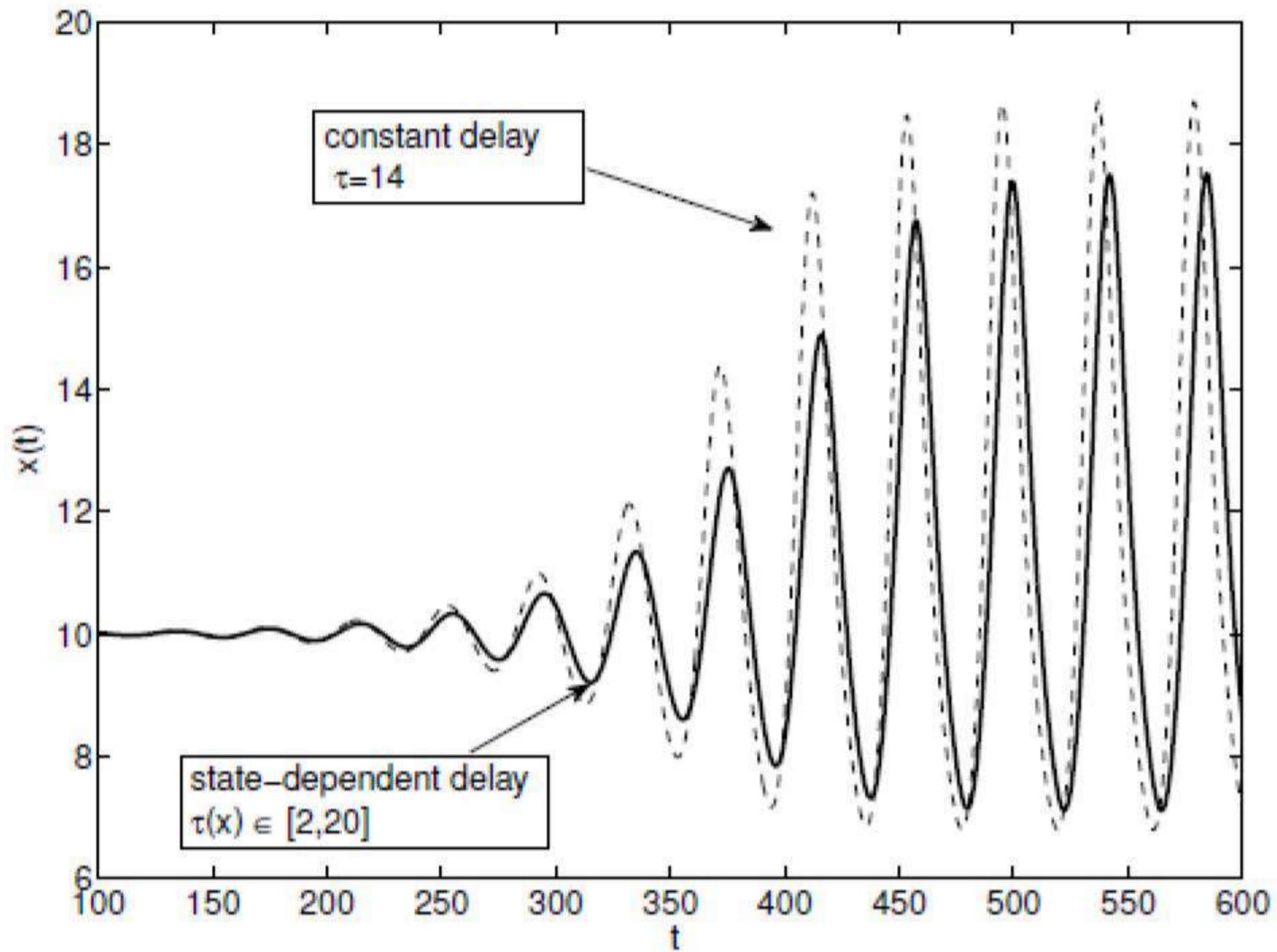
onde $b(y) = b_1(y)e^{-\mu_0 \tilde{\tau}}$ e $\mu(y) = \mu_1(y)$, que é exatamente a

Equação de “Blowfly”.

State-dependent delays $\tau(x) \in [2, 20]$



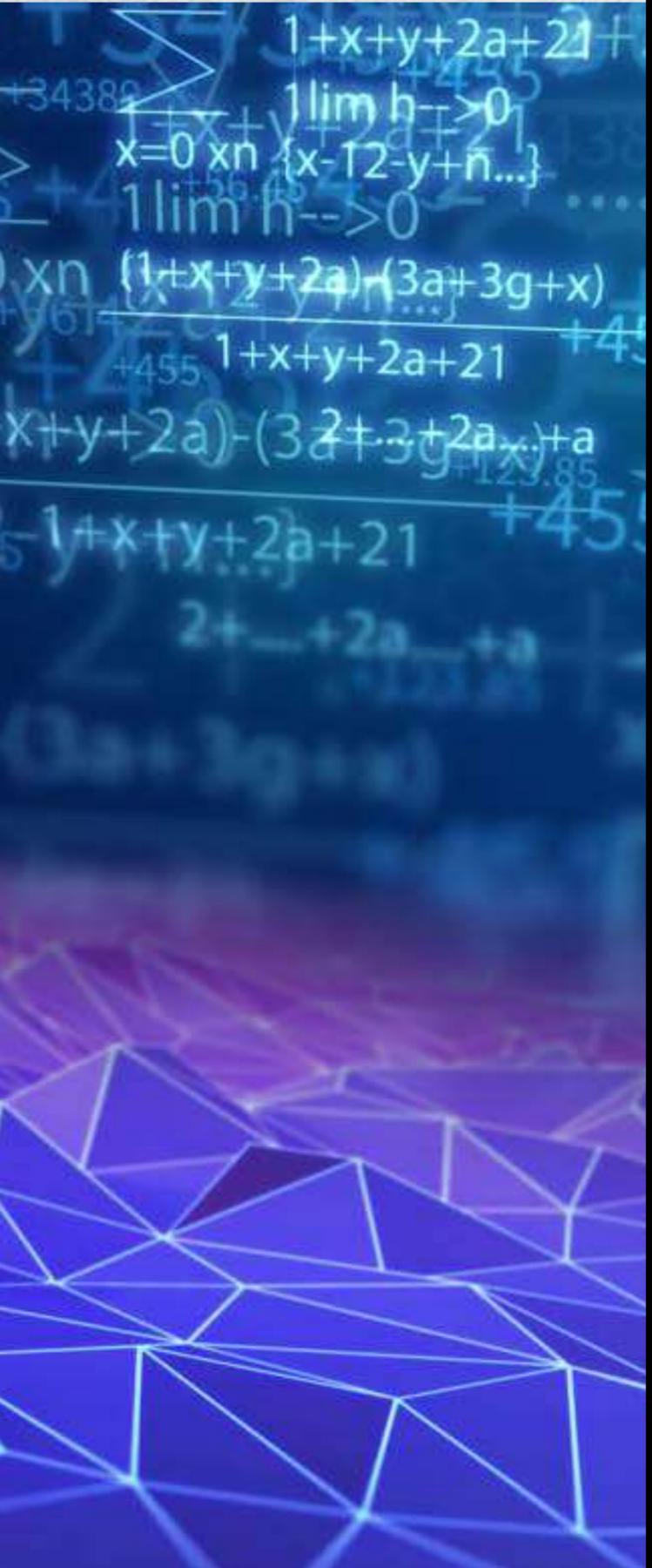
*Figura retirada de tese de doutorado de Maria Barbarossa



*Figura retirada de tese de doutorado de Maria Barbarossa

"In the context of population dynamics, the delay arises frequently as the maturation time from birth to adulthood, and this time is in some cases a function of the total population"

Arino et al. (2001)



Equações Diferenciais Funcionais

Equação diferencial funcionais com retardamento

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(X(t), X_t) \\ X_{t_0} = \phi \end{cases}$$

- **Caso retardo finito**

Para $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, defina $x_t : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$x_t(\theta) = x(t + \theta).$$

- **Caso retardo infinito**

Para $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, defina $x_t : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

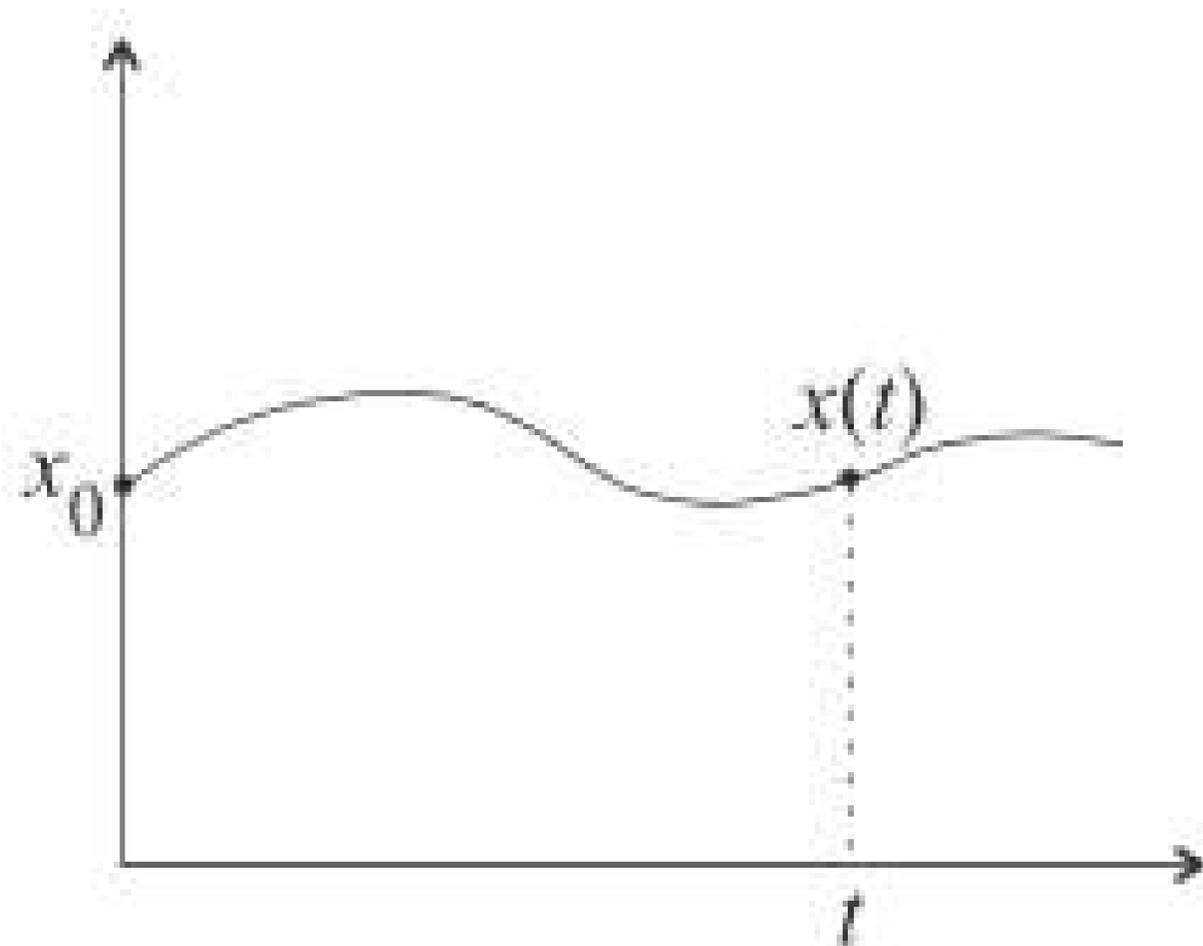
$$x_t(\theta) = x(t + \theta).$$

**Equações diferenciais com
retardo**

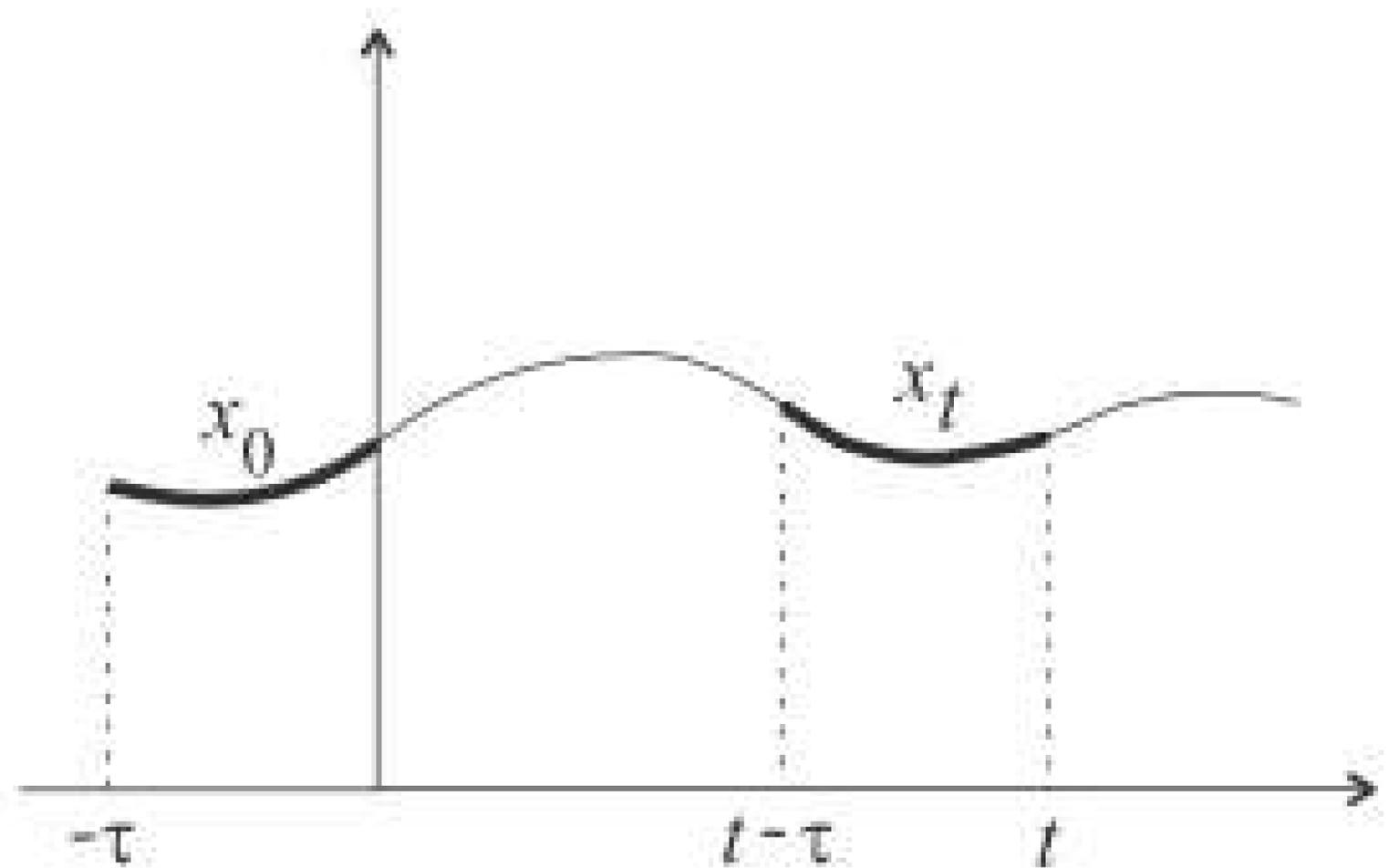
versus

**Equações diferenciais
ordinárias**

EDO



EDF



Considere a EDO abaixo

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Sabemos que ela admite a solução exponencial

$$y(t) = e^{kt}$$

Formulação para EDDs:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky(t - \tau) \\ y(t) = 1, \quad -\tau \leq t < 0 \end{cases}$$

Note que a condição inicial é trocada por uma função inicial em um intervalo finito.

Método

dos

Passos

Considere o caso $k = -1$ e $\tau = 1$.

Resolvendo a equação para $t \in [0, \tau)$, temos

$$\frac{dy}{dt} = -1$$

e usando $y(0) = 1$, temos $y = 1 - t$, $0 \leq t < 1$.

Procedendo analogamente para o próximo intervalo
[1, 2), temos

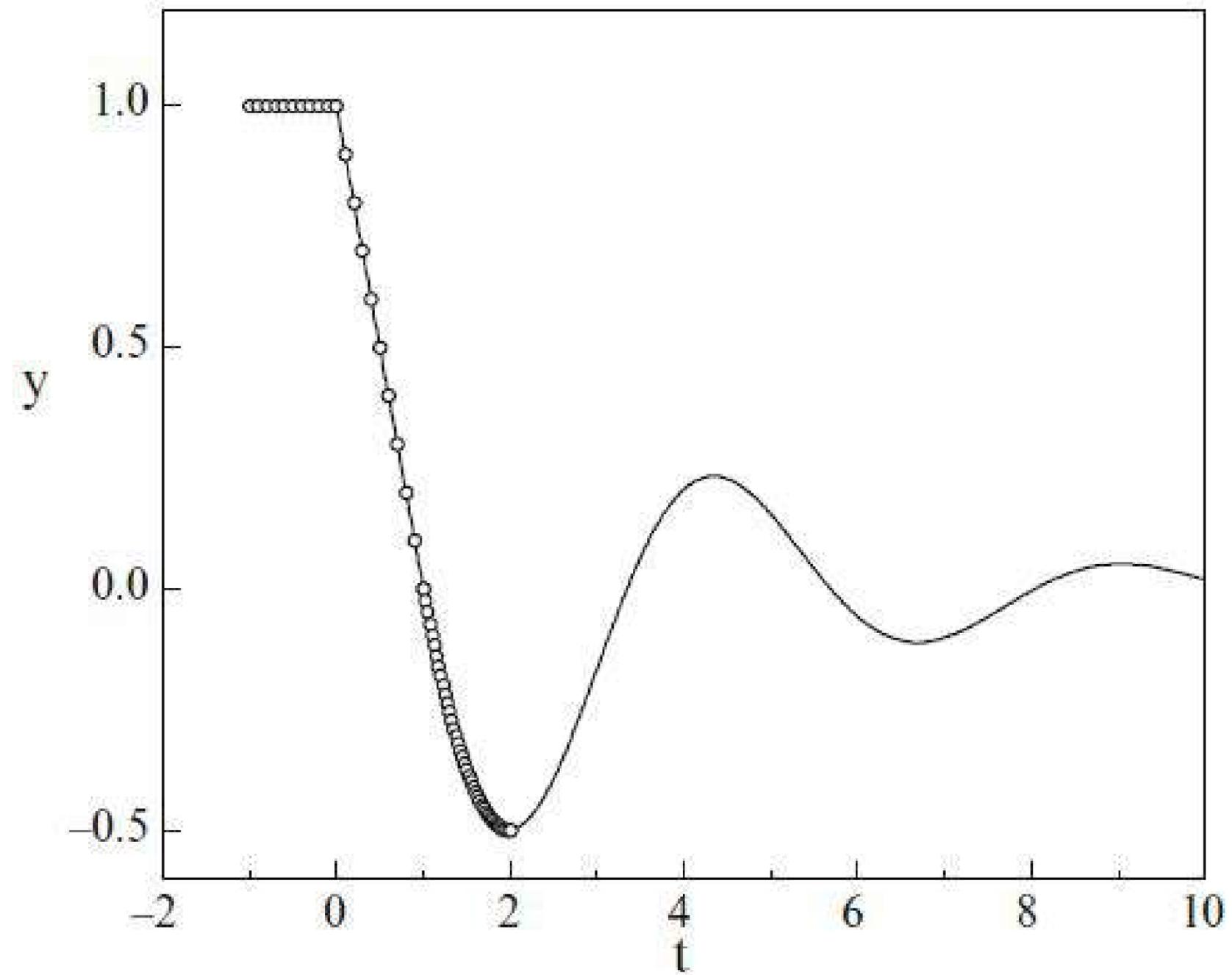
$$\frac{dy}{dt} = -y(t-1) = -(1 - (t-1)) = -1 + (t-1)$$

com a **condição inicial em $t = 1$.**

A solução neste caso seria

$$y = -(t - 1) + \frac{1}{2}(t - 1)^2$$

para $1 \leq t < 2$.



*Figura retirada de T. Erneux, Applied delay differential equations, volume 3 of Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, 2009

Outros tipos de equações diferenciais com retardos

**Tem
mais?**



Outros tipos de equações diferenciais com retardamento

—● $\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau(t))), \quad \tau(t) > 0.$

—● $\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau(x(t))))), \quad \tau(t) > 0.$

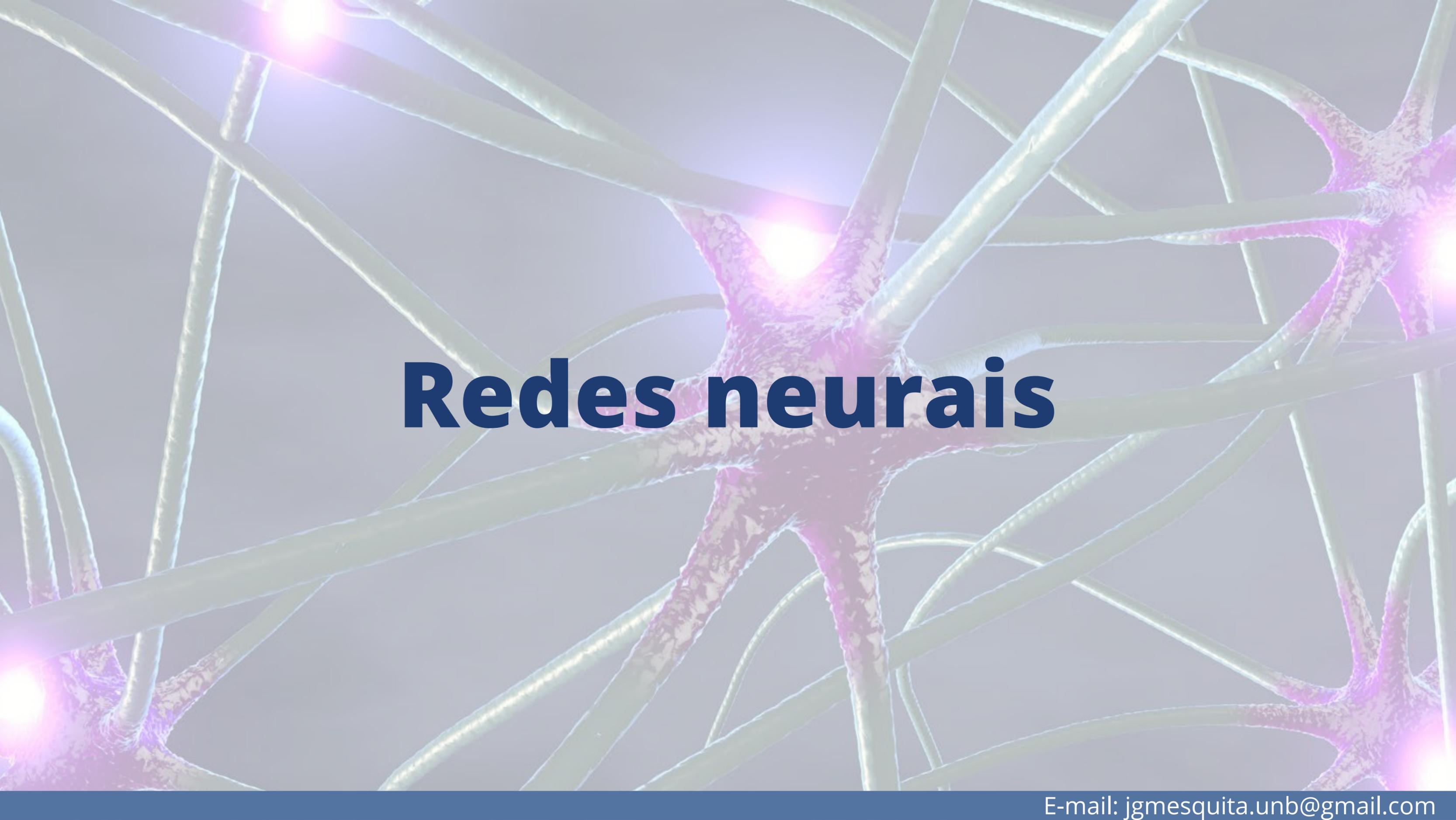
Outros tipos de equações diferenciais com retardamento

Equações do tipo neutro

- $\dot{x}(t) = f(x(t), \dot{x}_t)$
- $\dot{x}(t) = f(x(t), \dot{x}(t - \tau)), \tau > 0$
- $\dot{x}(t) = f(x(t), \dot{x}(t - \tau(t))), \tau(t) > 0$



Aplicações

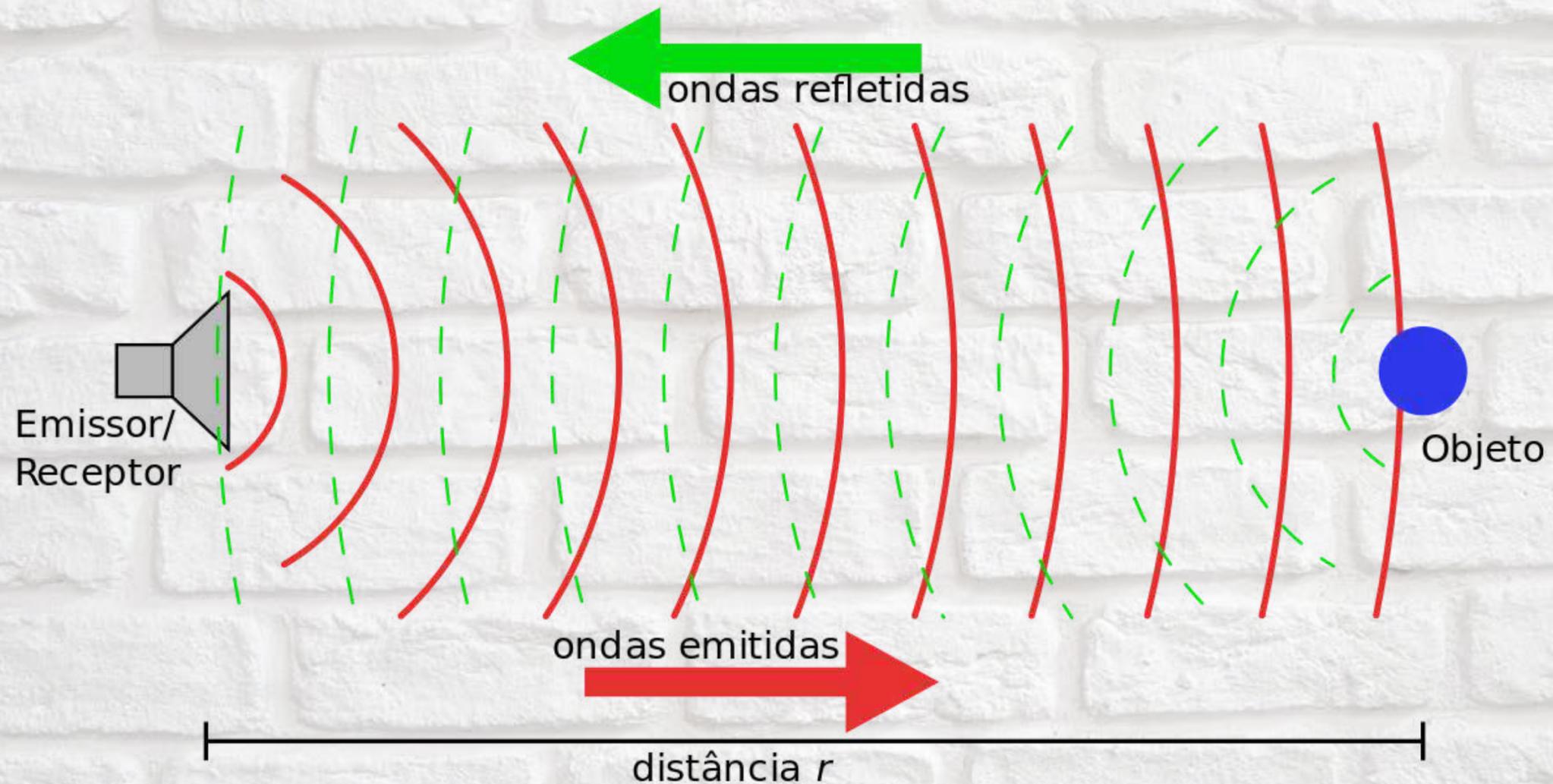
A 3D rendering of a neural network. The image shows a complex web of interconnected nodes and fibers. The nodes are depicted as glowing, multi-colored spheres (purple, blue, and yellow) with a textured surface. The fibers are thin, translucent tubes in shades of blue and purple, connecting the nodes in a dense, branching pattern. The background is a soft, light blue gradient. The overall aesthetic is futuristic and scientific.

Redes neurais

Time delays have important influence on learning algorithms. (...), not only delays affect the learning of other parameters such as gains, time constants or synaptic weights but also delays themselves may be part of the adjustable parameters of a neural system so as to increase the range of its dynamics. There exist numerous examples of finely tuned delays and delay lines, and certainly many delays are subject to variations, for instance during the growth of an organism"

Hartung, Krisztin, Walther, Wu, 2006

Retardo dependendo do estado



Ingestão de medicamentos





Proliferação de células cancerosas

Modelos epidemiológicos



Método da Média

Método da Média Periódico

Equação Original

$$\begin{cases} x'(t) = \varepsilon f(x, t) + \varepsilon^2 g(x, t, \varepsilon), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Equação Média

$$\begin{cases} y'(t) = \varepsilon f_0(y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

onde

$$f_0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x, s) ds$$

Método da Média Não Periódico

Equação Original

$$\begin{cases} x'(t) = \varepsilon f(x, t) + \varepsilon^2 g(x, t, \varepsilon), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Equação Média

$$\begin{cases} y'(t) = \varepsilon f_0(y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

onde

$$f_0(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x, s) ds$$

Exemplos

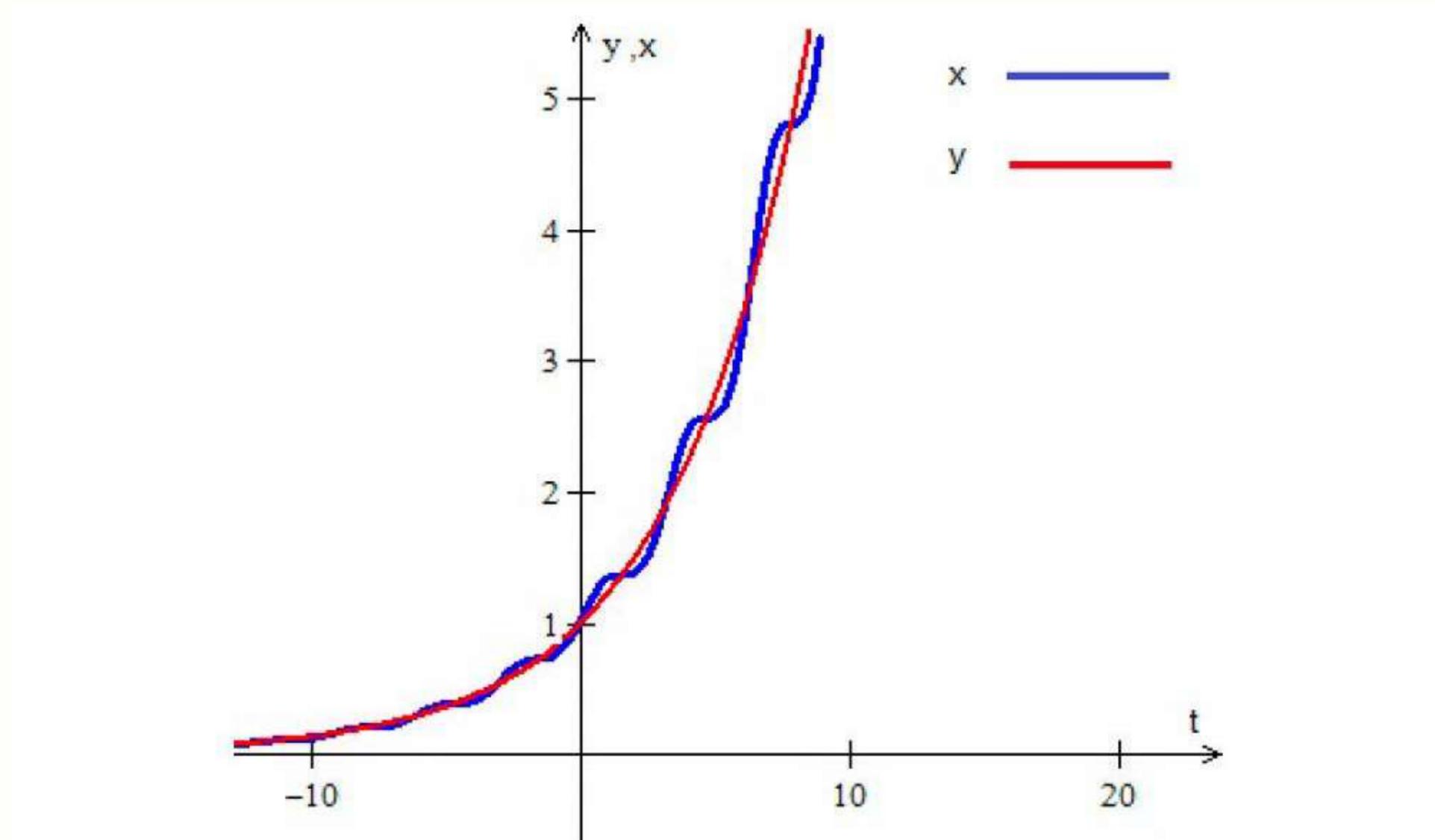
Equação Original:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 4\varepsilon(\cos^2 t)x(t), \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Equação Média:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = 2\varepsilon y(t); \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exemplos



Exemplos

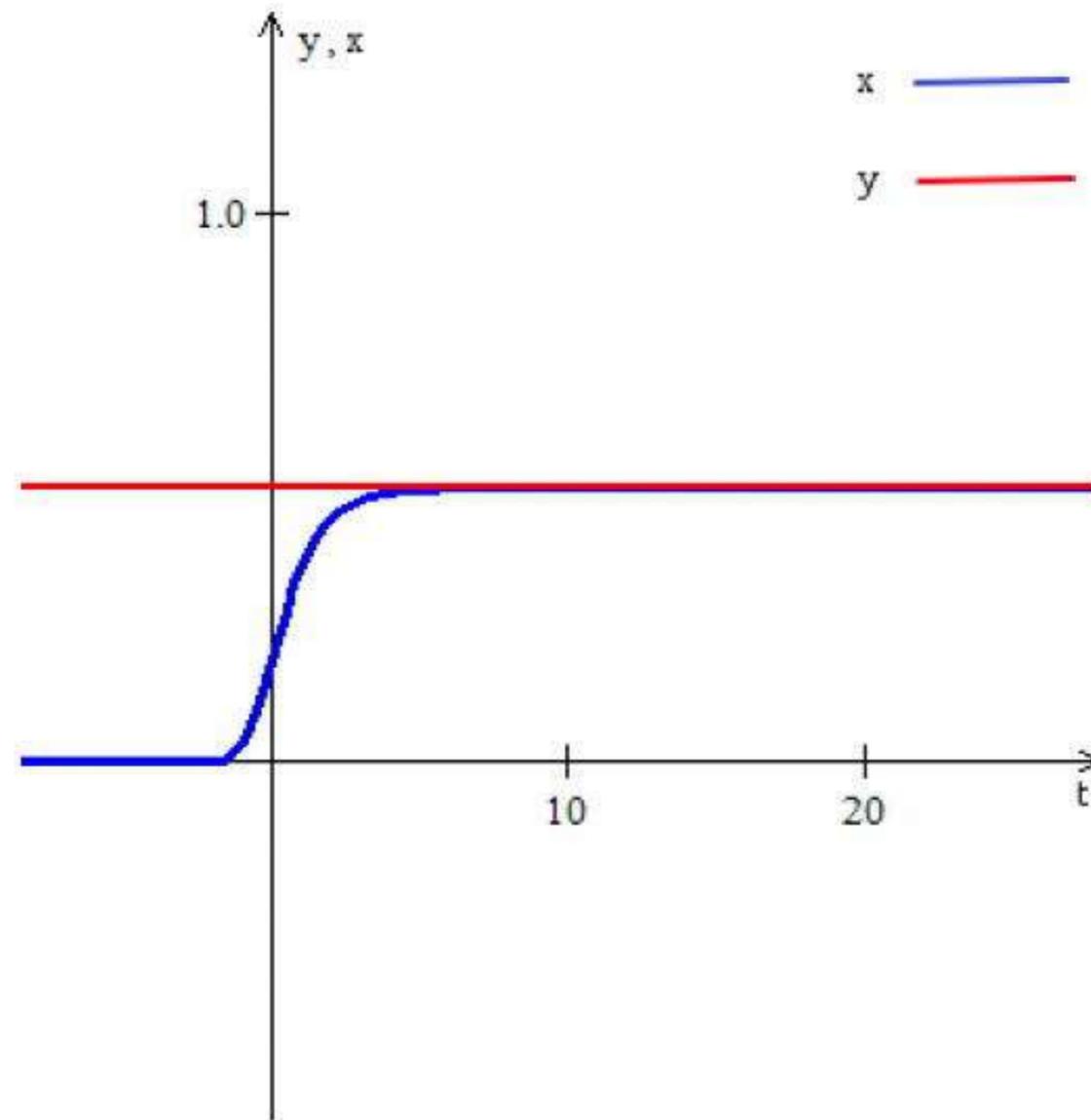
Equação Original:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \varepsilon(e^{-t})x(t); \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

Equação Média:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = 0; \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

Exemplos



Exemplos

Equação Original

$$\dot{x}(t) = \varepsilon(-4\cos^2(t)x(t-r) + x(t)),$$

onde $x(t) = 1$ para $t \in [-r, 0]$.

Equação Média:

$$\dot{z}(t) = \varepsilon(-2z(t-r) + z(t)), \quad z(t) = 1, \quad t \in [-r, 0].$$

Exemplos

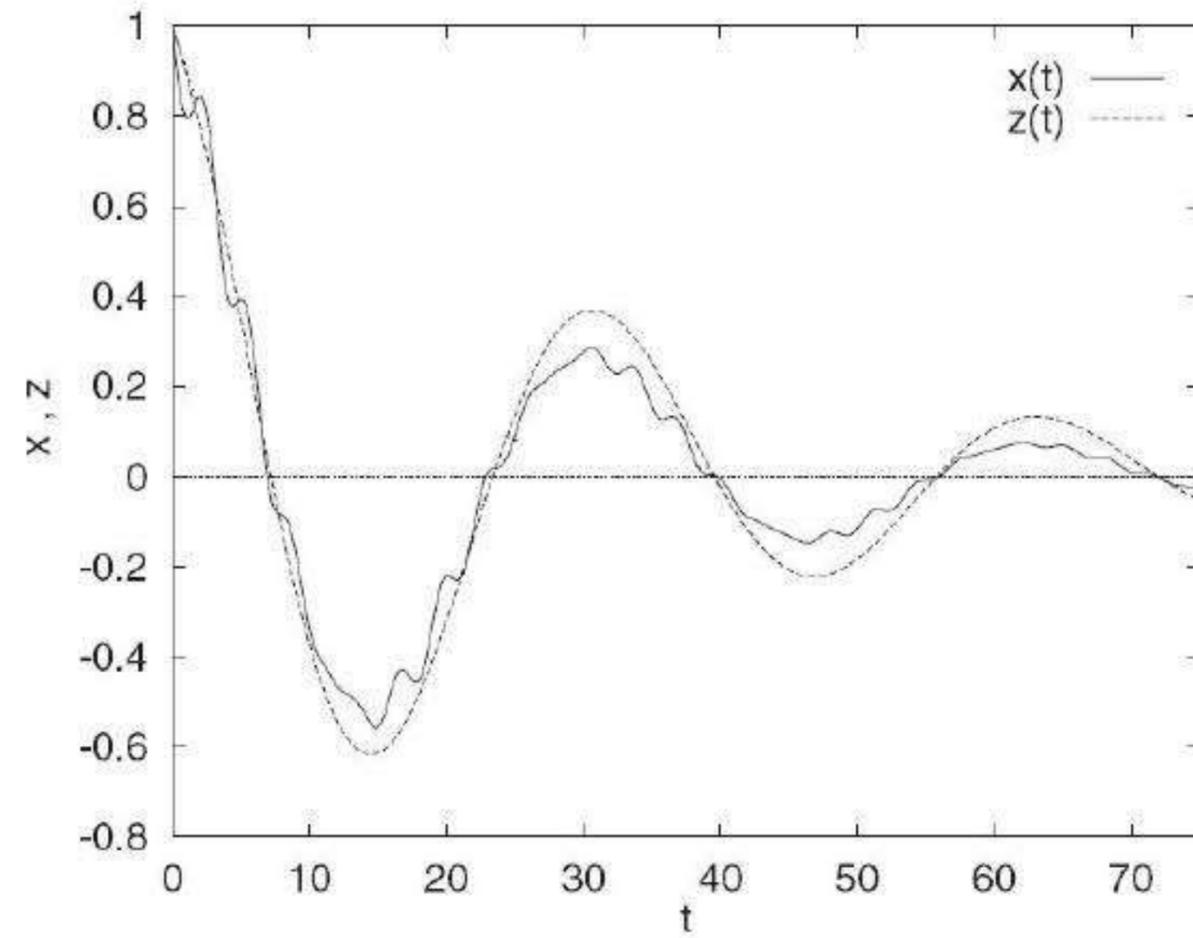


Figura: Gráfico plotado usando $\varepsilon = 0.1$ e $r = 5$

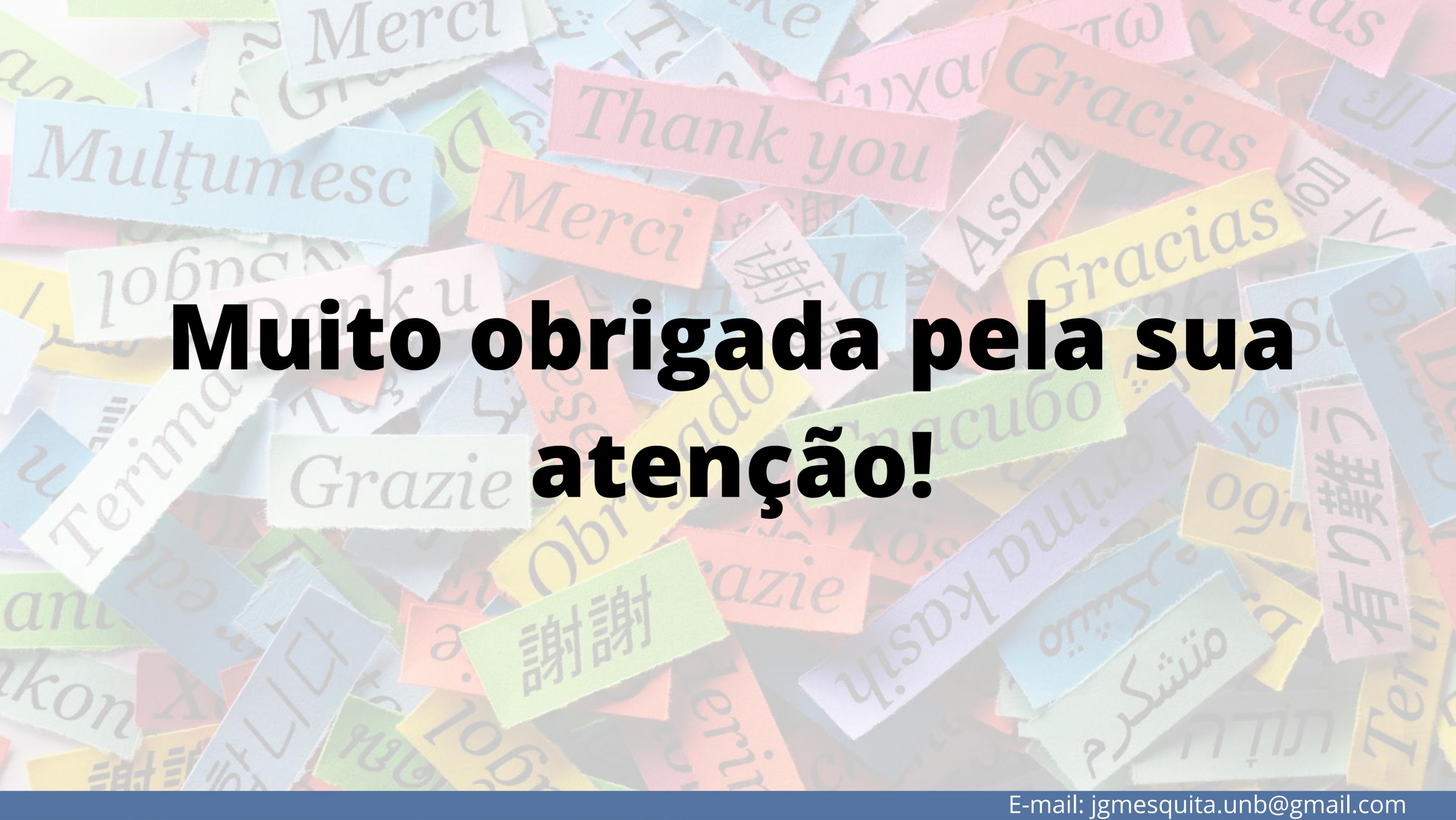


Problemas em aberto e em desenvolvimento

Problemas em aberto e em desenvolvimento

- EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS DO TIPO NEUTRO COM RETARDO DEPENDENDO DO ESTADO

- EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS EM MEDIDA COM RETARDO DEPENDENDO DO ESTADO



**Muito obrigada pela sua
atenção!**