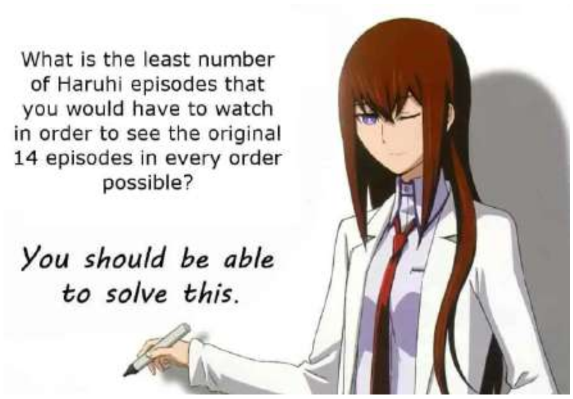
Análise Combinatória nas olimpíadas de Matemática e nos animes

Vitória Aparecida Santos Ferreira - vitoriaaparecida94@gmail.com

25° Semana Olímpica - Julho 2022 - Nível 1



1 Definições iniciais ([4],[1])

Serão apresentados alguns conceitos centrais de Análise Combinatória com exemplos que ajudarão a resolver os exercícios mais abrangentes propostos ao final.

Usa-se $n!$, chamado de *n fatorial*, para representar $n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Por convenção, $0! = 1$.

O *princípio multiplicativo* afirma que o total de possibilidades para um evento é dado pelo produto das quantidades de opções dadas.

Exemplo 1. De quantas formas podem ser dispostos k objetos diferentes em n caixas distintas?

Resolução: o primeiro objeto pode ir em qualquer uma das n caixas. O segundo pode ocupar qualquer caixa, incluindo a que recebeu o primeiro. Assim, cada objeto possui n possibilidades de escolha e são n^k maneiras de dispor todos os objetos.

1.1 Combinação simples

A *combinação simples* de n elementos tomados k a k, denotada por $C_n^k = \binom{n}{k}$, é definida como o número de escolhas não ordenadas de k elementos, com n disponíveis. É calculado pela expressão $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Exemplo 2. Quantos são os anagramas da palavra UNIFORME que começam e terminam em vogal?

Resolução: escolhem-se as vogais que serão usadas no início e no final de $\binom{4}{2} = 6$ formas. Depois disso, permutam-se as demais 6 letras diferentes de $6!$ modos. Como a vogal que começa pode trocar de lugar com a que termina, tem-se que multiplicar por $2!$, chegando em $6 \cdot 6! \cdot 2! = 8640$ anagramas.

Exemplo 3. De quantos modos se pode dividir 6 pessoas em 3 duplas, com a primeira viajando para a Noruega, a segunda, para a Bulgária e a terceira, para a Hungria?

Resolução: para ir à Noruega, há $\binom{6}{2}$ possibilidades de dupla. Depois, escolhem-se os que visitam a Bulgária de $\binom{4}{2}$ formas e, no final, resta $\binom{2}{2}$ dupla para viajar para a Hungria. O total é $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = \frac{6!}{2!4!} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{2!}{2!0!} = \frac{6!}{2!2!2!} = 90$.

Exemplo 4. Em uma escola, 6 amigos serão divididos em duplas para fazerem um trabalho. De quantos modos isso pode ser feito?

Resolução: pode-se pensar que a solução será como acima, mas note que não se atribui algo diferente a cada dupla, como antes ocorria, ou seja, a configuração ab, cd, ef não difere de cd, ab, ef. Uma vez formadas as duplas, por não haver diferenciação entre elas, divide-se o total obtido por 3!, que é a quantidade de ordenação das duplas. A resposta é, portanto, $\frac{90}{3!} = \frac{90}{6} = 15$.

Exemplo 5. Em uma mangueira, há 10 mangas de diferentes tamanhos. De quantas formas se pode colher certa quantidade delas?

Resolução: seja k o número de mangas a serem colhidas, em que $0 \le k \le 10$. Para se colher 0 mangas, há apenas $1 = \binom{10}{0}$ forma. Para pegar 1 das mangas, pode-se fazê-lo de $10 = \binom{10}{1}$ maneiras distintas. Para tomar duas, são $\binom{10}{2}$ formas, e assim por diante, até haver $1 = \binom{10}{10}$ modos de colher todas as mangas. Portanto, a resposta para a questão é $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \cdots + \binom{10}{10}$. Por outro lado, se atribuirmos o número 0 para uma manga que não foi colhida e o 1 para uma que foi, tem-se que cada fruto tem duas possibilidades: receber 0 ou receber 1. Assim, pelo princípio multiplicativo, são $\underbrace{2 \cdots 2}_{10 \text{ fatores}} = 2^{10}$ diferentes maneiras de colher mangas. Este exemplo ilustra a identidade

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Exemplo 6. Se $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, quantos são os subconjuntos de k elementos? E os subconjuntos de k elementos que não possuem elementos consecutivos?

Resolução: a primeira pergunta tem como resposta $\binom{n}{k}$. Para a segunda, considere que o 0 representa um número ausente no subconjunto tomado e 1, um número presente. Assim, o subconjunto $\{1, 4, 6\}$ corresponde a $1001010\ldots0$. Posicione, primeiro, os $n-k$ números 0. Com isso, ficam definidos $n-k+1$ locais para os números 1 ocuparem. Com isso, não há dois 1 adjacentes e a quantidade de maneiras de fazer tal disposição é dada por $\binom{n-k+1}{k}$.

1.2 Combinação completa (combinação com repetição)

Define-se como o número de maneiras de se escolher k objetos dentre n existentes, não importando a ordem e **podendo repetir a escolha do mesmo tipo de objeto**. Este cenário ocorre em uma sorveteria, por exemplo, onde há determinados sabores e o cliente pode repetir bolas de sorvete do mesmo sabor no seu pedido. Denota-se tal quantidade por CR_n^k e ela pode ser traduzida na equação

$$x_1 + \cdots + x_n = k, x_i \ge 0.$$

Considere * o símbolo que representa cada um dos k itens que serão escolhidos. Note que cada ordenação de $\underbrace{* \cdots *}_{k} \underbrace{+ \cdots +}_{n-1}$ produz exatamente uma solução para a equação.

Ex.: sejam $n = 4, k = 5$. Então, **+**+*+ indica $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 0$.

Há $n+k-1$ posições e, definindo as $n-1$ ocupadas pelos sinais de +, configura-se uma solução. Com isso, são $\binom{n+k-1}{n-1}$ soluções em inteiros não negativos.

Se cada variável permitisse apenas valores positivos, então se teria que dispor os símbolos * e, entre cada dois deles, criar um espaço que pode ser ocupado por um sinal de +. Ex.: se $n=3, k=5$, tem-se que há 4 locais onde se colocar os 2 sinais de +: *-*-*-*-*. Escolhendo-se o 1° e o 2°, tem-se que *+*+***, isto é, $x_1=1, x_2=1, x_3=3$.

Desse modo, são $\binom{k-1}{n-1}$ soluções em inteiros positivos.

Exemplo 7. De quantas maneiras se pode distribuir k objetos iguais em n caixas diferentes?

Resolução: por serem distintas, representemos por x_i a quantidade em cada caixa, com $1 \le i \le n$. Pelo enunciado, $x_1+\cdots+x_n=k$, onde cada x_i é não negativo. Pelo que se explicou acima, são $\binom{n+k-1}{n-1}$ modos de fazer a distribuição.

Exemplo 8. No dia 20/07, foi comemorado o dia do amigo e João comprou 10 paçoquinhas para dar aos seus 4 melhores amigos. De quantos modos isso pôde ser feito, considerando que cada pessoa ganhou pelo menos uma?

Resolução: $x_1+x_2+x_3+x_4=10, x_i \ge 1$. Posicionando os 10 objetos idênticos, criam-se 9 espaços entre eles, dos quais escolhem-se 3 para serem colocados os sinais de +. Assim, são $\binom{9}{3}=\frac{9!}{6!3!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{6}=84$ maneiras.

1.3 Permutação com repetição

É a ordenação de elementos em que existe mais de um exemplar do mesmo tipo, como em anagramas de palavras com letras repetidas.

Exemplo 9. Quantos são os anagramas da palavra OLIMPÍADA?

Resolução: há 9 letras para permutar, o que daria 9! ordenações. Mas, a cada anagrama formado, a troca das letras I entre si não produz um novo anagrama. Com isso, houve uma contagem indevida, que é removida ao se dividir por 2! o valor anterior. Da mesma maneira, inverter os A não muda o que se formou. Tem-se, assim, $\frac{9!}{2!2!}$ anagramas.

Exemplo 10. Um time de futebol jogou 13 partidas em um campeonato, onde acumulou 6 vitórias, 5 derrotas e 2 empates. De quantas formas isso pode ter ocorrido?

Resolução: o problema pede o número de permutações dos eventos "vitória", "derrota"e "empate", que pode ser visto como o número de anagramas da palavra VVVVVVDDDDDEE, que é igual a $\frac{13!}{6!5!2!}$, onde se descontou as contagens devido a trocas de letras iguais.

Compare esta resolução com a do exemplo 3.

Exemplo 11. O número de soluções em inteiros não negativos para a equação $x_1+\cdots+x_n=k$ é igual à permutação com repetição de $n+k-1$ objetos, onde $n-1$ são repetidos entre si e k são iguais entre si.

Resolução: o número de soluções pode ser contabilizado usando a ordenação de $\underbrace{*\cdots*}_{k}\underbrace{+\cdots+}_{n-1}$, que é uma permutação com repetição de $n-1$ sinais de + e k símbolos *.

Portanto, são $\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ soluções em inteiros não negativos.

Compare com o valor antes dado, $\binom{n+k-1}{n-1}$.

2 O problema envolvendo o anime ([3])

Hahuri Suzumiya é um anime sobre viagem no tempo de 2006 que, devido a tal tema, possui uma ordem não cronológica dos eventos em seus episódios. Com isso, fãs assistiam em diferentes ordens. A pergunta matemática que se relaciona com a série televisiva é: qual a menor sequência contendo todas as permutações de um conjunto com n elementos?

Isto é, se você quiser assistir uma série com n episódios em todas as combinações possíveis, qual a menor quantidade de episódios que você tem que assistir?

Ex.: Se $n = 3$, pode-se considerar a sequência 1-2-3-1-2-1-3-2-1, que contém as permutações (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2), (2,1,3), (1,3,2), (3,2,1) de um conjunto de 3 elementos.

É um problema que permanece em aberto desde 1993 e que teve um grande avanço em 2011, quando uma pessoa anônima respondeu a uma pergunta feita por um fã do anime desenvolvendo uma fórmula para a solução.

3 Exercícios ([2],[4])

Agora é a sua vez :) Não se prenda às fórmulas, pois em cada problema elas podem ser deduzidas como fizemos ao longo deste material.

1. (OBMEP - Nível 3 - 2010 - adaptado) Tio Paulo trouxe cinco presentes diferentes, entre os quais um livro, para distribuir entre suas sobrinhas Ana, Bruna, Cecília e Daniela. De quantos modos ele pode distribuir os presentes com cada uma ganhando pelo menos um e o livro sendo dado para Ana?

2. (OBMEP - Nível 3 - 2011) Com os algarismos 1, 4, 6, 8, pode-se formar vários números de três algarismos distintos. Qual a soma de todos esse números?

3. Um trem com m passageiros tem que fazer n paradas.

   a) De quantas maneiras os passageiros podem saltar do trem nas paradas?

   b) Responda o mesmo que em a), mas agora considerando apenas a quantidade de passageiros que descem em cada parada.

4. (AIME - 2005) Robert possui 4 moedas de ouro indistinguíveis e 4 moedas de prata indistinguíveis. Cada uma possui uma gravação em apenas um dos lados. Ele deseja colocar as 8 moedas em uma pilha de forma que nenhum par de moedas adjacentes esteja com a gravação em contato. Calcule o número de maneiras de fazer esta disposição.

5. Quantos números com nove algarismos têm a soma de seus algarismos par?

6. Uma pessoa tem 10 amigos. Durante vários dias, ela convida alguns deles para jantar de forma que o grupo nunca se repete (ela pode, por exemplo, convidar ninguém em um dos dias). Por quantos dias ela pode seguir esta regra?

7. Cada lado de um barco tem que ser ocupado por exatamente 4 remadores. De quantas maneiras podemos escolher um time de remadores se há 31 candidatos, 10 deles querem estar do lado esquerdo, 12 querem estar do lado direito e os outros 9 não possuem preferência?

8. (Islândia - 1996) Prove que, entre 52 inteiros distintos, há sempre dois tais que sua soma ou diferença é divisível por 100.

   (Dica: congruência modular e princípio da casa dos pombos.)

Referências

[1] Fabrício S. Benevides and Antonio Caminha M. Neto. *Combinações completas*. Portal da Matemática da OBMEP, 2° ano Ensino Médio.

[2] D. Fomin, S. Genkin, and Itenberg I. *Círculos matemáticos: a experiência russa*. IMPA, 1st edition, 2012.

[3] Mary Beth Griggs. An anonymous 4chan post could help solve a 25-year-old math mystery. `https://www.theverge.com/2018/10/24/18019464/4chan-anon-anime-haruhi-math-mystery`, última visita em 18/07/2022.

[4] José Plínio O. Santos, Margarida P. Mello, and Idani T.C. Murari. *Introdução à Análise Combinatória*. Editora ciência moderna, 4st edition, 2007.