**25ª Semana Olímpica da OBM - Recife, julho de 2022**

**Bases Numéricas - Nível 1**

Prof. Antonio C do Amaral

## Sistemas de Numeração

Para registrar uma quantidade inteira de objetos, seres ou coisas, somos ensinados a recorrer ao uso dos símbolos $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{8}$ e $\mathbf{9}$, chamados algarismos, que agrupados segundo poucas regras, formam um numeral do **Sistema de Numeração Decimal**. Representações de quantidades por meio de registros escritos formados por algarismos são chamadas de numerais. Um número (natural) é a expressão abstrata de uma quantidade. O termo algarismo refere-se a cada um dos símbolos que são combinados para representar números em um dado sistema de numeração, e cada uma dessas combinações de algarismos é chamada um numeral. Um mesmo número admite diferentes representações por meio de diferentes numerais

É bastante intuitivo relacionar a palavra "decimal" com a quantidade de símbolos à disposição para a composição de numerais do Sistema de Numeração Decimal, muito embora o principal motivo esteja no uso sucessivo de potências de base 10 na decomposição do numeral para justificar o valor posicional de cada algarismo. Ex. $235 = 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 5$.

Ao longo de todo o movimento histórico até a popularização dos símbolos usados hoje, os chamados algarismos indo-arábicos, notabilizaram-se os povos mesopotâmicos, nos primórdios da invenção humana, como pioneiros no uso de representações que expressam quantidades. Registros antigos apontam que os babilônios usaram um sistema em que um mesmo símbolo assumia valores diferentes, dependendo da posição que ocupasse no numeral. Esse sistema de numeração era construído a partir de dois símbolos básicos: um com valor absoluto 1 e outro com valor absoluto 10. Esses símbolos eram combinados por meio de um processo aditivo simples para formar os numerais de 1 a 59, que eram então empregados como algarismos para o sistema posicional de base 60. O mesmo algarismo de valor absoluto 1 era então empregado para representar o primeiro grupo de 60. Em lugar de 10, o sistema posicional babilônio utilizava 60 como base, isto é, era sexagesimal (assim como o sistema utilizado atualmente para representar horas, minutos e segundos).

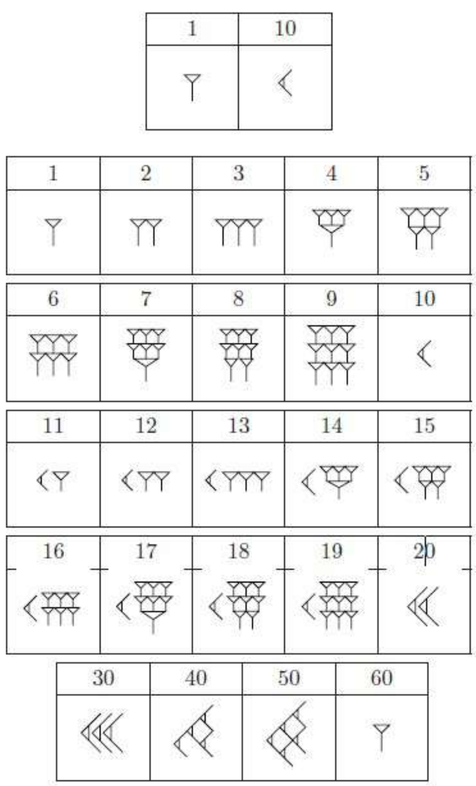



Figura 1: Sistema de Numeração Babilônio

A ausência de um símbolo para o **zero** no sistema sexagesimal dos babilônios implicava em problemas na representação de quantidades. Sozinho, o símbolo que representa o 1 se confunde com a representação do numeral 60.

O surgimento de sistemas de numeração em povos e épocas diferentes reflete as necessidades de cada lugar. Por volta de 3400 anos antes da era cristã os **egípcios** mantinham seus próprios meios de representação de quantidades com símbolos em potências de base 10. Seria o primeiro sistema de numeração decimal?

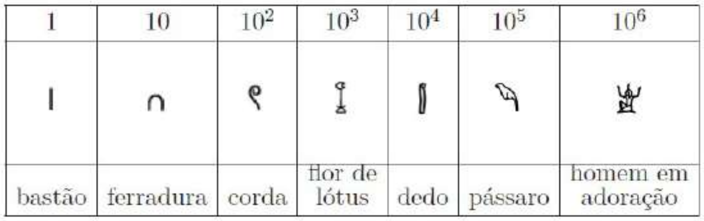



Figura 2: Sistema de Numeração dos Egípcios

Já os **maias** desenvolveram um sistema de numeração posicional, como o dos babilônios, com um sistema aditivo simples embutido. Esse sistema era constituído por um algarismo com valor 1 e um com valor 5, e o sistema posicional era (essencialmente) de base 20. Os dois símbolos formam os numerais de 1 a 19, que eram então usados como algarismos no sistema posicional vigesimal. Uma diferença importante do sistema babilônio é que os maias tinham um algarismo para representar posições vazias, papel desempenhado pelo algarismo 0 no nosso sistema decimal.

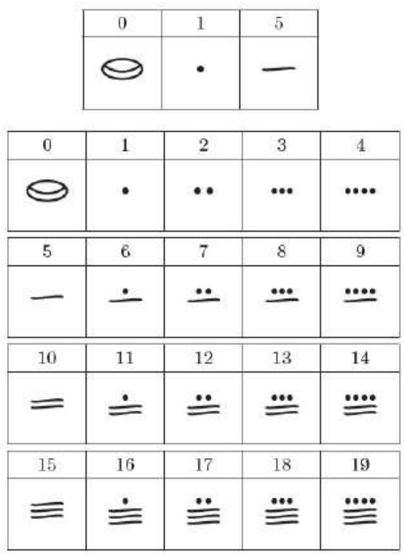



Figura 3: Sistema de Numeração dos Maias

**Problema 01** Considere os sistema de numeração: romano, egípcio, vigesimal maia, indo-arábico. Para cada um deles, dê um exemplo, se possível, de um número entre 600 e 700 cuja representação tenha exatamente cinco algarismos.

## Representação de Números em Diferentes Bases

Os sistemas babilônio, maia e indo-arábico de bases 60, 20 e 10, respectivamente, mantêm em comum a característica de que o valor dos seus símbolos (ou algarismos) depende da posição no agrupamento. A natureza posicional, bem como a certeza sobre como se organiza cada numeral de um sistema de numeração posicional, permitem a busca pela representação de um número em diferentes bases. Além do que, é importante compreender sobre a possibilidade de se ter representações de números em outras bases, ou seja, base 2, 3, 4, 5 etc. Vejamos, por exemplo, o número 1956 expresso nas bases 2, 5, 7 e 9.

$1956 = \mathbf{1}\times 2^{10} + \mathbf{1}\times 2^9 + \mathbf{1}\times 2^8 + \mathbf{1}\times 2^7 + \mathbf{0}\times 2^6 + \mathbf{1}\times 2^5 + \mathbf{0}\times 2^4 + \mathbf{0}\times 2^3 + \mathbf{1}\times 2^2 + \mathbf{0}\times 2^1 + \mathbf{0}\times 2^0 = [11110100100]_2$

$1956 = \mathbf{3}\times 5^4 + \mathbf{0}\times 5^3 + \mathbf{3}\times 5^2 + \mathbf{1}\times 5^1 + \mathbf{1}\times 5^0 = [30311]_5$

$1956 = \mathbf{5}\times 7^3 + \mathbf{4}\times 7^2 + \mathbf{6}\times 7^1 + \mathbf{3}\times 7^0 = [5463]_7$

$1956 = \mathbf{2}\times 9^3 + \mathbf{6}\times 9^2 + \mathbf{1}\times 9^1 + \mathbf{3}\times 9^0 = [2613]_9$

**Problema 02** Considere o sistema posicional de base 5 cujos algarismos são dados abaixo. Escreva os números 15, 25 e 28 neste sistema.

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| ⊠ | □ | $\overline{\wedge}$ | ▽ | △ |

A mudança de base decimal para outra base maior do que ou igual a 2 compreende sempre a decomposição do número em termos de potências da nova base. A menos de ordem, a decomposição de um número em uma soma de potências de uma base escolhida é única. Isso sugere haver uma, e somente uma, forma para a representação de um número em um sistema de numeração dado. O exercício da transformação de um número decimal para outra base pode ser realizado aos poucos ou com recurso ao processo de divisões sucessivas de dois números inteiros até a observação do resto encontrado.

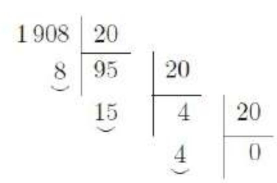
A seguir apresentamos uma maneira de transformar o número 534 para a base 4.

$$\begin{aligned}
534 &= 133 \times 4 + 2 = (33 \times 4 + 1) \times 4 + 2 = 33 \times 4^2 + 1 \times 4 + 2 \\
&= (8 \times 4 + 1) \times 4^2 + 1 \times 4 + 2 = 8 \times 4^3 + 1 \times 4^2 + 1 \times 4 + 2 \\
&= (2 \times 4 + 0) \times 4^3 + 1 \times 4^2 + 1 \times 4 + 2 \\
&= 2 \times 4^4 + 0 \times 4^3 + 1 \times 4^2 + 1 \times 4 + 2
\end{aligned}$$

Ou seja, $534 = [20112]_4$.

O procedimento de decomposição para converter um número natural em base 10 para outra base, consiste em divisões sucessivas pela base e pode ser resumido esquematicamente por meio da representação usual do algoritmo da divisão.

Vejamos esse procedimento na conversão do número 1908 para base vigesimal.




Como $1908 = 4 \times 20^2 + 15 \times 20 + 8$, teremos aí uma pequena confusão para a representação vigesimal do número em razão do "algarismo" 15. Espaços entre os símbolos na representação poderiam solucionar o conflito.

Logo, $1908 = [4\ 15\ 8]_{20}$

É claro que o uso de símbolos próprios, diferentes dos algarismos indo-arábicos, soaria uma melhor alternativa para a representação na base vigesimal.

**Problema 03** Converta para a base 7 os números

(a) $[1000]_{10}$

(b) $[538]_8$

**Problema 04** Quantos números existem entre $[234]_7$ e $[1234]_7$?

**Problema 05** Uma professora vê escrito no quadro o exemplo $3 \cdot 4 = 10$. Quando ia apagar, ela pensou que talvez esta equação estivesse em outro sistema numérico com base diferente da base dez. Isso é possível?

**Problema 06** Uma sacola contém 100 bombons: 24 com sabor de limão e 32 de sabor café. Em qual sistema de numeração estava sendo contada essas quantidades?

**Problema 07** Existe um sistema numérico para cada conjunto de igualdades a seguir que as tornam simultaneamente verdadeiras?

(a) $3 + 4 = 10$ e $3 \cdot 4 = 15$

(b) $2 + 3 = 5$ e $2 \cdot 3 = 11$

**Problema 08** Enuncie e prove uma condição (envolvendo a representação do número) que nos permite determinar se o número é par ou é ímpar.

(a) em base 3;

(b) em base $n$.

## Adição e Multiplicação

Somar (ou subtrair) e multiplicar números em uma base não decimal segue o mesmo ritmo reconhecido para as operações com números em base 10. Uma vez conhecidas as tábuas (ou tabuadas) de adição e multiplicação com os símbolos daquela base, é suficiente escolher o algoritmo adequado para realizar a operação.

Veja, por exemplo, as tabuadas de adição e multiplicação na base 7.

| + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 10 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 10 | 11 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 10 | 11 | 12 |
| 4 | 4 | 5 | 6 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 5 | 5 | 6 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 6 | 6 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

| × | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 11 | 13 | 15 |
| 3 | 0 | 3 | 6 | 12 | 15 | 21 | 24 |
| 4 | 0 | 4 | 11 | 15 | 22 | 26 | 33 |
| 5 | 0 | 5 | 13 | 21 | 26 | 34 | 42 |
| 6 | 0 | 6 | 15 | 24 | 33 | 42 | 51 |

Figura 4: Tabuada de Adição e Multiplicação na Base 7

Vejamos, a seguir, um exemplo de uma adição, uma subtração e uma multiplicação a partir da tabuada de base 7.

$$
\begin{array}{cccc}
 & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\
 & 6 & 5 & 4 \\
+ & 5 & 4 & 6 \\
\hline
1 & 5 & 3 & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
 & & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 14} \\
 & 6 & \cancel{5} & \cancel{4} \\
- & 5 & 4 & 6 \\
\hline
 & 1 & 0 & 5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 2} & \\
 & & & & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 2} & \\
 & & & & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 3} & \\
 & & & & 6 & 5 & 4 \\
\times & & & & 5 & 4 & 6 \\
\hline
 & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & \\
 & & & 5 & 5 & 5 & 3 \\
 & & 3 & 6 & 1 & 2 & \\
 & 4 & 5 & 6 & 6 & & \\
\hline
 & 5 & 3 & 4 & 6 & 0 & 3
\end{array}
$$

**Problema 09** Construa as atabuadas de adição e multiplicação de base 8 e efetue as seguintes operações, sem converter para a base 10.

(a) $[753]_8 + [567]_8$

(b) $[737]_8 \times [243]_8$

(c) $[753]_8 - [567]_8$

**Problema 10** Existe alguma base $\beta$ tal que $[47]_\beta$ representa um número par? Em caso afirmativo, determine todas.

**Problema 11** Considere o sistema de numeração posicional de base $\beta$. Determine um critério para decidir se um numeral expresso na base $\beta$ representa um número par ou ímpar nos casos em que:

(a) um número par;

(b) um número ímpar.

**Problema 12** Existem algarismos $a_0, a_1$ e $a_2$ tais que o numeral $[a_2 a_1 a_0]_\beta$ representa um número ímpar, qualquer que seja a base $\beta$? Generalize para números com $n$ algarismos.

**Problema 13** Considere $a = [a_N, ..., a_0]_9$.

(a) Mostre que $a$ é múltiplo de 4 se, e somente se, $\sum_{k=0}^{N} a_k$ é múltiplo de 4.

(b) Existe algum outro número (diferente de 2 e 4) para o qual se aplique este mesmo critério de divisibilidade na base 9? Isto é, existe algum outro $p \in \mathbb{N}$ para o qual valha que: $a$ é múltiplo de $p \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k$ é múltiplo de $p$?

**Problema 14**

(a) O número $[57]_9$ é múltiplo de 3? E $[123]_9$?

(b) Qual o critério para determinar se um numeral na base 9 representa um múltiplo de 3?

(c) Considere $a = [a_N, ..., a_0]_9$. Existe algum outro número (diferente de 3) para o qual se aplique este mesmo critério de divisibilidade na base 9? Isto é , existe algum outro $p \in \mathbb{N}$ para o qual valha que: $a$ é múltiplo de $p \Leftrightarrow a_0$ é múltiplo de $p$?

**Nota:** *O texto acima é composto por recortes dos livros: (1) Livro do Professor de Matemática na Educação Básica, Vol. 1 (Cydara Ripoll, Letícia Rangel e Victor Giraldo e (2) Círculos Matemáticos - A Experiência Russa (Dimitri Fomin e outros)*