

# Semana Olímpica 2022

## Contagens Elementares

### Nível 1

Samuel Feitosa

## 1 O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

**Exercício 1.** Existem 5 diferentes tipos de sorvetes e 3 diferentes tipos de vasilhas em uma sorveteria. De quantos modos podemos escolher um sorvete e uma vasilha?

**Exercício 2.** Na sorveteira do problema anterior existem 4 tipos diferentes de coberturas. De quantas maneiras podemos escolher uma vasilha, um sorvete e uma cobertura?

**Exercício 3.** Existem 3 cidades  $A$ ,  $B$  e  $C$  em Bruzundanga. Existem 6 estradas entre  $A$  e  $B$ , 4 estradas entre  $B$  e  $C$ . De quantos modos podemos ir de  $A$  até  $C$ ?

**Exercício 4.** Uma nova cidade  $D$  e novas estradas foram construídas em Bruzundanga. Três estradas entre  $A$  e  $D$ , duas entre  $D$  e  $C$ . De quantos modos podemos ir de  $A$  até  $C$ ?

**Exercício 5.** Se na sorveteria tivéssemos dinheiro apenas para comprar duas opções dentre sorvete, vasilha, cobertura. De quantos modos isso pode ser feito?

**Exercício 6.** Nós chamamos um número natural de "bonito" se todos os seus dígitos são ímpares. Quantos números bonitos de quatro dígitos existem?

**Exercício 7.** Jogamos uma moeda três vezes. Quantas sequências diferentes de caras e coroas podemos obter?

**Exercício 8.** Cada quadrado de um tabuleiro  $2 \times 2$  pode ser pintado de preto ou branco. Quantas colorações diferentes podemos ter?

**Exercício 9.** De quantas maneiras podemos preencher um cartão da loteira esportiva? Na loteira esportiva você tem que adivinhar o resultado de 13 jogos, indicando ou uma vitória para um dos times ou um empate.

**Exercício 10.** No alfabeto de Bruzundanga, existem apenas três letras,  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Uma palavra é uma sequência de arbitrária de não mais que 4 letras. Quantas palavras existem no alfabeto de bruzundanga?

**Exercício 11.** Um capitão e um vice-capitão tem que ser escolhidos de um time com 11 jogadores. De quantos modos podemos fazer isto?

**Exercício 12.** De quantas maneiras podemos costurar uma bandeira de três cores com três tiras horizontais de igual tamanho se nós temos seis tiras de cores diferentes.

**Exercício 13.** Quantos números naturais de 4 algarismos (na base 10), que sejam menores que 5000 e divisíveis por

5, podem ser formados usando-se apenas os algarismos 2, 3, 4 e 5?

**Exercício 14.** Quantos números naturais pares na que se escrevem (na base 10) com três algarismos distintos?

**Exercício 15.** De quantas maneiras podemos colocar uma torre branca e outra preta em um tabuleiro de xadrez de modo que elas não se ataquem?

**Exercício 16.** De quantas maneiras podemos colocar um rei branco e outro preto em um tabuleiro de xadrez de modo que eles não se ataquem?

**Exercício 17.** Quantos números de seis dígitos tem pelo menos um dígito par?

**Exercício 18.** Existem apenas 6 letras no alfabeto de Cracolândia. Uma palavra é qualquer sequência de seis letras em que duas delas são iguais. Quantas palavras tem o alfabeto de Cracolândia?

## 2 PERMUTAÇÕES

### 2.1 PERMUTAÇÕES SIMPLES

Vamos agora estudar o problema de quantas formas podemos arranjar  $n$  objetos em uma linha. Tal arranjo é chamado permutação. Antes de estudá-los vamos ver o conceito de *fatorial*. Se  $n$  é um número natural, então  $n!$  (Lê-se *n* fatorial) é o produto:  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ . Então  $2! = 2$ ,  $3! = 6$ ,  $4! = 24$  ... Para conveniência nos cálculos, definimos  $0! = 1$ .

**Exercício 19.** Quantos números de três dígitos podem ser escritos usando os dígitos 1, 2 e 3 (sem repetição) em alguma ordem?

**Exercício 20.** De quantos modos podemos colocar 4 bolas de cores diferentes em uma linha?

**Exercício 21.** Em um país existem 20 cidades e todo par de cidades é ligado por uma estrada. Quantas estradas existem?

**Exercício 22.** Quantas diagonais existem em um polígono de  $n$  lados convexo?

**Exercício 23.** Existem 12 estudantes em uma festa. Cinco deles são garotas. De quantas maneiras esses 12 estudantes podem ser arranjados em uma fila se

i) Não existem restrições?

- ii) As 5 garotas devem ficar juntas(formando um bloco)?
- iii) Duas garotas não podem ser adjacentes?
- iv) Entre dois garotos específicos  $A$  e  $B$ , existem exatamente 3 garotas e nenhum garoto?

**Exercício 24.** Considere  $m$  garotos e  $n$  garotas arranjados em uma fila, onde  $m, n \in \mathbb{N}$ . Encontre o número de maneiras de fazermos esses arranjos de modo que

- i) Não existem restrições
- ii) Não existem garotos adjacentes ( $m \leq n + 1$ ).
- iii) As  $n$  garotas formam um único bloco.
- iv) Um garoto particular e uma garota particular têm que ser adjacentes.

**Exercício 25.** (Espanha 1985) Prove que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(n + 1)(n + 2) \dots (2n)$$

é divisível por  $2^n$ .

**Exercício 26.** Encontre o número de divisores positivos comuns de  $10^{40}$  e  $20^{30}$

**Exercício 27.** Mostre que para qualquer  $n \in \mathbb{N}$  o número de divisores positivos de  $n^2$  é sempre ímpar.

**Exercício 28.** Mostre que o número de divisores positivos de  $\underbrace{111 \dots 1}_{1992 \text{ vezes}}$  é par.

## 2.2 PERMUTAÇÕES CIRCULARES

**Exercício 29.** Um colar é um fio circular com pedrinhas que podem deslizar sobre o fio. É permitido rodar o colar, mas não virá-lo. Quantos diferentes colares podem ser feitos usando 13 diferentes pedrinhas?

**Exercício 30.** Se no problema anterior fosse permitido virar o colar. Qual seria a resposta?

**Exercício 31.** Encontre o número de maneiras de sentarmos  $n$  casais de namorados ao redor de uma mesa circular em cada um dos seguintes casos:

- (i) Homens e mulheres estão sentados de modo alternado
- (ii) Todo homem está do lado de sua namorada.

**Exercício 32.** De quantos modos podemos sentar 5 garotos e 3 garotas ao redor de uma mesa circular se

- (i) não existem restrições?
- (ii) O garoto  $B_1$  não pode sentar ao lado da garota  $G_1$ ?
- (iii) Duas garotas não podem sentar adjacentes?

## 3 EXERCÍCIOS

**Exercício 33.** De quantas maneiras podemos colocar 8 torres em um tabuleiro de xadrez de modo que quaisquer duas não se ataquem?

**Exercício 34.** Quantas palavras podem ser escritas usando exatamente cinco letras A e não mais que três letras B(sem usar nenhuma outra letra diferente de A e B)?

**Exercício 35.** De quantas maneiras podemos dividir 14 pessoas em 7 pares?

**Exercício 36.** Quantos números de 9 dígitos tem a soma de seus dígitos sendo par?

**Exercício 37.** Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla-escolha, com cinco alternativas por questão?

**Exercício 38.** Quantos inteiros há entre 1000 e 9999 cujos algarismos são distintos?

**Exercício 39.** Quantos divisores naturais possui o número 360?

**Exercício 40.** Quantos são os números de 4 dígitos que possuem pelo menos dois dígitos iguais?

**Exercício 41.** Quantos subconjuntos possui um conjunto que tem  $n$  elementos?

**Exercício 42.** De quantos modos podemos arrumar 8 torres iguais em um tabuleiro de xadrez( $8 \times 8$ ) de modo que não haja duas torres na mesma linha nem na mesma coluna?

**Exercício 43.** Em uma banca há 5 exemplares iguais da revista A, 6 exemplares iguais da revista B e 10 exemplares iguais da revista C. Quantas coleções não vazias de revistas dessa banca é possível formar?

**Exercício 44.** De um baralho comum (52 cartas) sacam-se sucessivamente e sem reposição três cartas. Quantas são as extrações nas quais a primeira carta é de copas, a segunda é um rei e a terceira não é dama?

**Exercício 45.** Um vagão de metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem sentar de frente, 3 preferem sentar de costas e os demais não têm preferência. De quantos modos os passageiros podem se sentar, respeitando-se as preferências?

**Exercício 46.** Escrevem-se os inteiros de 1 até 222222. Quantas vezes o algarismo zero é escrito?

**Exercício 47.** Quantos são os números de 5 algarismos, na base 10:

- 1) nos quais o algarismo 2 figura?
- 2) nos quais o algarismo 2 não figura?

**Exercício 48.** Em um concurso há três candidatos e cinco examinadores, devendo cada examinador votar em um candidato. De quantos modos os votos podem ser distribuídos?

**Exercício 49.** O código morse usa "palavras" contendo de 1 a 4 "letras", as "letras" sendo ponto e traço. Quantas "palavras" existem no código morse?

**Exercício 50.** Fichas podem ser azuis, vermelhas ou amarelas; circulares, retangulares ou triangulares; finas ou grossas. Quantos tipos de fichas existem?

**Exercício 51.** Escrevem-se números de cinco dígitos (inclusive os começados por zero) em cartões. Como 0, 1, 8 não se alteram de cabeça para baixo e como 6 de cabeça para baixo se transforma em 9, um só cartão pode representar dois números (por exemplo, 06198 e 86190). Qual é o número mínimo de cartões para representar todos os números de cinco dígitos?

**Exercício 52.** No Senado Federal, o distrito federal e os 26 estados da federação têm 3 representantes cada. Deve-se formar uma comissão de modo que todos os estados e o Distrito federal estejam representados por 1 ou 2 senadores. De quantos modos essa comissão pode ser formada?

## 4 Miscelânea

**Exercício 53.** Permutam-se de todos os modos possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6, 7 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente.

1. que lugar ocupa o número 62417?
2. qual o número que ocupa o 66° lugar?
3. qual o 200° algarismo escrito?
4. qual a soma dos números assim formados?

**Exercício 54.** De quantos modos é possível sentar 7 pessoas em cadeiras em fila de modo que duas determinadas pessoas dessas 7 não fiquem juntas?

**Exercício 55.** De quantos modos é possível colocar em uma prateleira 5 livros de matemática, 3 de física e 2 de estatística, de modo que livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?

**Exercício 56.** Quantas são as permutações dos números  $(1, 2, \dots, 10)$  nas quais o 5 está situado à direita do 2 e à esquerda do 3, embora não necessariamente em lugares consecutivos?

**Exercício 57.** De quantos modos  $r$  rapazes e  $m$  moças podem se colocar em fila de modo que as moças fiquem juntas?

**Exercício 58.** Delegados de 10 países devem se sentar em 10 cadeiras em fila. De quantos modos isso pode ser feito se os delegados do Brasil e de Portugal devem sentar juntos e o do Iraque e o dos Estados Unidos não podem sentar juntos?

**Exercício 59.** Um cubo de madeira tem umm face da cada cor. Quantos dados diferentes podemos formar gravando os números de 1 a 6 sobre essas faces?

**Exercício 60.** Quantos dados diferentes podemos formar gravando números de 1 a 6 sobre as faces indistiguíveis de um cubo de madeira?

**Exercício 61.** Um campeonato é disputado por 12 clubes em rodadas de 6 jogos cada. De quantos modos é possível selecionar os jogos de primeira rodada?

**Exercício 62.** Quantas são as permutações simples dos números  $1, 2, \dots, n$  nas quais o elemento que ocupa a  $k$ -ésima posição é inferior a  $k + 4$ , para todo  $k$ ?

**Exercício 63.** Quantas são as permutações simples dos números  $1, 2, \dots, n$  nas quais o elemento que ocupa a  $k$ -ésima posição é maior que  $k - 3$ , para todo  $k$ ?

**Exercício 64.** (AMC) Uma aranha tem uma meia e um sapato para cada um de seus oito pés. De quantas maneiras diferentes a aranha pode se calçar admitindo que a meia tem que ser colocada antes do sapato?

**Exercício 65.** (AHSME) Nove cadeiras em uma sala irão ser ocupadas por 6 estudantes e 3 professores  $A, B$  e  $C$ . Os professores chegam antes dos alunos e escolhem suas cadeiras de modo que entre dois professores exista uma cadeira vazia. De quantas maneiras os três professores podem escolher seus lugares?

**Exercício 66.** (AHSME) Nós chamamos um número de telefone  $d_1d_2d_3 - d_4d_5d_6d_7$  de *legal* se o número  $d_1d_2d_3$  é igual a  $d_4d_5d_6$  ou a  $d_5d_6d_7$ . Assuma que cada  $d_i$  pode ser qualquer dígito de 0 a 10. Quantos telefones legais existem?

**Exercício 67.** (Torneio das Cidades 1997) Duas pessoas realizam um truque. A primeira retira 5 cartas de um baralho de 52 cartas (previamente embaralhado por um membro da platéia), olha-as, e caloca-as em uma linha da esquerda para a direita: uma com a face para baixo ( não necessariamente a primeira), e as outras com a face para cima. A segunda pessoa deve adivinhar a carta que está com a face para baixo. Prove que elas podem combinar um sistema que sempre torna isto possível.

**Exercício 68.** Os números inteiros compreendidos entre 100000 e 999999 são divididos em classes de modo que dois números diferentes estão na mesma classe se e só se eles têm os mesmos algarismos, diferindo apenas na ordem. Assim por exemplo, 52221 e 125252 estão na mesma classe. Quantas classes são assim formadas?

**Exercício 69.** (Olimpíada Russa)

- (i) Uma comissão se reuniu 40 vezes. Em cada reunião estiveram presentes 10 pessoas de tal maneira que quaisquer dois dos membros da comissão não estiveram juntos em mais de uma oportunidade. Demonstre que a quantidade de membros da comissão é maior que 60.
- (ii) Demonstre que com 25 pessoas não se pode formar mais que 30 comissões de 5 pessoas cada uma de modo que não haja duas comissões que tenham mais de um membro em comum.

**Exercício 70.** Há  $n$  tipos de doce na loja do Zé.  $m$  amigos se juntam para ir à loja e cada um compra  $k$  doces diferentes. Cada tipo de doce é comprado por  $r$  dos amigos. Cada par de tipo de doces é escolhido por  $t$  amigos. Prove que:

- (i)  $mk = nr$ ;
- (ii)  $r(k - 1) = t(n - 1)$ .

**Exercício 71.** Determine o número de quadrados com todos os seus vértices pertencentes a um reticulado de pontos  $10 \times 10$ .

**Exercício 72.** Encontre o número de pares ordenados  $(x, y)$  de inteiros, tais que  $x^2 + y^2 \leq 5$ .

**Exercício 73.** Com os dígitos 1 e 2 formamos 5 números de  $n$  dígitos de tal forma que dois quaisquer destes números coincidam em exatamente  $m$  casas decimais e não existe nenhuma casa decimal onde coincidam os 5 números. Demonstre que:

$$\frac{2}{5} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{3}{5}.$$

**Exercício 74.** O número 3 pode ser expresso como uma soma ordenada de uma ou mais inteiros positivos de 4 maneiras diferentes:

$$3, \quad 1+2, \quad 2+1, \quad 1+1+1.$$

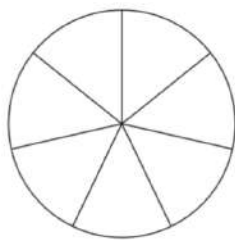
Mostre que todo inteiro  $n$  pode ser expresso de  $2^{n-1}$  maneiras

**Exercício 75.** Considere o conjunto  $M = \{1, 2, \dots, 1000000\}$  e seu subconjunto  $A$  formado por todos os números da forma  $m^2 + k^3$  com  $m$  e  $n$  naturais. Quem tem mais elementos:  $A$  ou  $M \setminus A$ ?

**Exercício 76.** Dado um conjunto de pessoas, forma-se comitês compostos de  $r$  pessoas cada e de modo que dados quaisquer  $r + 1$  comitês, existe pelo menos uma pessoa que está em todos esses comitês. Mostre que existem uma pessoa que está em todos os comitês.

**Exercício 77.** (Colômbia 1998) Considere um tabuleiro  $m \times n$  e três cores. Desejamos colorir cada segmento do tabuleiro com uma das três cores de modo que cada quadradinho tenha dois lados de uma cor e dois lados de outra cor. Quantas colorações são possíveis?

**Exercício 78.** (Mathcounts 2013) Uma roleta circular possui 7 seções de igual tamanho e cada uma delas será pintada com uma dentre duas cores. Duas colorações são consideradas iguais se uma pode ser rotacionada para produzir a outra. De quantas maneiras a roleta pode ser pintada?



**Exercício 79.** (Banco de Questões da OBMEP 2017) Um quadrado Latino é um tabuleiro  $n \times n$  preenchido com  $n$  símbolos distintos de modo que em cada linha e em cada coluna não existam símbolos repetidos. Sabemos que existem 576 Quadrados Latinos distintos de dimensões  $4 \times 4$ . De quantos modos podemos completar o quadrado abaixo, que já possui duas casas preenchidas, com os algarismos 1, 2, 3 e 4 de modo que em cada linha e coluna figurem os quatro algarismos?

1		2	

**Exercício 80.** (Banco de Questões da OBMEP 2017) Existem  $2m$  miçangas de  $m$  cores distintas, sendo duas de cada cor. Essas miçangas são distribuídas em  $m$  caixas, com duas em cada caixa, de modo que é possível escolher uma miçanga em cada uma delas e obter um conjunto de  $m$  miçangas de cores distintas. Prove que o número de maneiras de fazermos esse tipo de escolha é necessariamente uma potência de 2.

**Exercício 81.** (OIM 2004) Em um tabuleiro  $1001 \times 1001$ , queremos colorir alguns quadrados de modo que:

- Se dois quadrados compartilham um lado, pelo menos um deles está pintado.
- Dados 6 quadrados consecutivos (horizontalmente ou verticalmente), então entre eles pelo menos dois quadrados consecutivos são pretos.

Encontre o número mínimo de quadrado que devem ser pintados satisfazendo essas duas condições.

**Exercício 82.** (OBMEP 2019) Um tabuleiro preenchido com as letras  $A, B, C$  e  $D$  é bacana se essas quatro letras aparecem em qualquer quadriculado  $2 \times 2$  do tabuleiro. Por exemplo, dos tabuleiros abaixo, o da esquerda é bacana e o da direita não é bacana.

C	D	C
A	B	A
C	D	C

C	B	C
C	D	A
A	C	B

a) Preencha os tabuleiros abaixo de modo que eles sejam bacanas e diferentes entre si.

A	B	
C	D	

A	B	
C	D	

A	B	
C	D	

- Quantos tabuleiros bacanas  $2 \times 8$  existem?
- Quantos tabuleiros bacanas  $8 \times 8$  existem?