25ª Semana Olímpica – Recife – Julho de 2022
Jogos de Subtração e a Sequência de Fibonacci – Nível 1

Rogério Ricardo Steffenon

UNISINOS – Universidade do Vale do Rio dos Sinos

E-mail: steffenonenator@gmail.com

Resumo

Nesta aula abordaremos jogos que envolvem estratégias vencedoras.

Jogos de Subtração

Agora analisaremos jogos com informação completa em que dois jogadores jogam alternadamente e sabem tudo sobre a posição corrente do jogo e os possíveis lances a cada momento.

Em particular, *informação completa* significa que o elemento de sorte não pode estar presente no jogo, nem pode haver *cartas escondidas* ou algo do gênero.

Posição Perdedora (P)

Não é possível deixar o adversário em uma posição perdedora.

A partir dela, é impossível escolher uma jogada e repassar uma posição perdedora para o adversário. Em outras palavras, *não importa o movimento escolhido*, o adversário irá receber uma posição vencedora.

Posição Vencedora (V)

É possível deixar o adversário em uma posição perdedora.

A partir dela, *podemos escolher uma jogada* e repassar uma posição perdedora para o adversário.

Cartões Mágicos Binários

Faremos a mágica com os Cartões Mágicos Binários, usando o seguinte roteiro:

O *matemágico* escolhe alguém da plateia e pede que essa pessoa pense num número de 1 a 64, sem revelá-lo.

Em seguida, são apresentadas as 6 cartelas abaixo e o matemático faz 6 perguntas.

O número que você pensou está na primeira cartela? Está na segunda cartela? E assim por diante.

Ao final das 6 perguntas o *matemágico* revela o número que a pessoa pensou.

Nesta palestra teremos uma plateia fictícia e o *matemágico* escolhe duas pessoas, digamos Ana e Beatriz, e irá adivinhar o número que cada um deles pensou.

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Teorema da Representação Binária

Todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como uma soma de diferentes potências de 2:

$2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, 2^6 = 64, 2^7 = 128, \ldots$

No sistema decimal temos, por exemplo,

$2036 = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 6 \times 10^0 = 2036_{10}$

Veja a representação binária de alguns números e usamos um 2 subscrito para indicar a base 2:

$1 = 1 \times 2^0 = 1_2$

$2 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 10_2$

$3 = 2 + 1 = 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 11_2$

$4 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 100_2$

$7 = 4 + 2 + 1 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 111_2$

$13 = 8 + 4 + 1 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 1101_2$

$37 = 32 + 4 + 1 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 100101_2$

$40 = 32 + 8 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 101000_2$

$54 = 32 + 16 + 4 + 2 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 110110_2$

$300 = 256 + 32 + 8 + 4 = 1 \times 2^8 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 = 100101100_2$

Cartões Mágicos de Fibonacci

Agora faremos a mágica com os Cartões Mágicos de Fibonacci, usando o seguinte roteiro:

O *matemágico* escolhe alguém da plateia e pede que essa pessoa pense num número de 1 a 120, sem revelá-lo.

Em seguida, são apresentadas as 10 cartelas e o *matemágico* faz **até** 10 perguntas.

O número que você pensou está na primeira cartela? Está na segunda cartela? E assim por diante.

Aqui há uma coisa que impressiona mais, pois se o número estiver numa determinada cartela, ele não estará na seguinte e, nesse caso, a quantidade de perguntas pode ser inferior a 10.

Ao final o *matemágico* revela o número que a pessoa pensou.

1	4	6	9	12	14
17	19	22	25	27	30
33	35	38	40	43	46
48	51	53	56	59	61
64	67	69	72	74	77
80	82	85	88	90	93
95	98	101	103	106	108
111	114	116	119	122	124

2	7	10	15	20	23
28	31	36	41	44	49
54	57	62	65	70	75
78	83	86	91	96	99
104	109	112	117	120	125

3	4	11	12	16	17
24	25	32	33	37	38
45	46	50	51	58	59
66	67	71	72	79	80
87	88	92	93	100	101
105	106	113	114	121	122

5	6	7	18	19	20
26	27	28	39	40	41
52	53	54	60	61	62
73	74	75	81	82	83
94	95	96	107	108	109
115	116	117	128	129	130

8	9	10	11	12	29
30	31	32	42	43	44
45	46	63	64	65	66
67	84	85	86	87	88
97	98	99	100	101	118
119	120	121	122	131	132

13	14	15	16	17	18
19	20	47	48	49	50
51	52	53	54	68	69
70	71	72	73	74	75
102	103	104	105	106	107
108	109	136	137	138	139

21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	32
33	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86
87	88	110	111	112	113
114	115	116	117	118	119
120	121	122	165	166	167

34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51
52	53	54	123	124	125

55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	199	200

89	90	91	92	93	94
95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106
107	108	109	110	111	112
113	114	115	116	117	118
119	120	121	122	123	124

Consideremos a sequência de Fibonacci

$F_1 = F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geqslant 3$.

Em outras palavras: os dois primeiros termos são iguais a 1 e a partir do terceiro cada termo é soma dos dois anteriores.

$F_1 = F_2 = 1$

$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$

$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$

$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$

$F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8$

$F_7 = F_6 + F_5 = 8 + 5 = 13$

$F_8 = F_7 + F_6 = 13 + 8 = 21$

$F_9 = F_8 + F_7 = 21 + 13 = 34$

$F_{10} = F_9 + F_8 = 34 + 21 = 55$

$F_{11} = F_{10} + F_9 = 55 + 34 = 89$

$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 89 + 55 = 144$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\cdots$
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	$\cdots$

Os resultados abaixo podem ser provados por indução:

$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$, para todo $n \geqslant 1$.

$F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n+1} = F_{2n+2} - 1$, para todo $n \geqslant 1$.

Teorema de Zeckendorf

Todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como soma de termos não consecutivos da sequência F_n para $n \geqslant 2$

$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144, \ldots$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\cdots$
F_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	$\cdots$

Vejamos alguns exemplos:

$8 = F_6 = 10000_F$

$13 = F_7 = 100000_F$

$20 = 13 + 5 + 2 = F_7 + F_5 + F_3 = 101010_F$

$40 = 34 + 5 + 1 = F_9 + F_5 + F_2 = 10001001_F$

$43 = 34 + 8 + 1 = F_9 + F_6 + F_2 = 10010001_F$

$50 = 34 + 13 + 3 = F_9 + F_7 + F_4 = 10100100_F$

$65 = 55 + 8 + 2 = F_{10} + F_6 + F_3 = 100010010_F$

$144 = F_{12} = 10000000000_F$

https://www.dcode.fr/zeckendorf-representation

Observe as representações de 40 e 65, o que é possível verificar?

Exemplo 5 – OBM 2014 – Nível 1 – Fase 3

Ana e Beatriz possuem muitas moedas. Elas colocam várias sobre uma mesa e jogam de acordo com as seguintes regras:

i. o primeiro a jogar retira no mínimo uma moeda, mas não todas.

ii. quem jogar a seguir pode retirar no mínimo uma moeda e no máximo o dobro do número de moedas que o jogador anterior retirou.

iii. ganha quem retirar a última moeda.

(a) Suponha que elas coloquem 11 moedas sobre a mesa.

Se Ana for a primeira a jogar e retirar duas moedas, mostre como Beatriz pode vencer o jogo (não importando quais sejam as demais jogadas de Ana).

(b) Agora suponha que elas coloquem 15 moedas sobre a mesa.

Mostre como a primeira a jogar pode vencer o jogo sempre (não importando quais sejam as jogadas da segunda).

(a) A estratégia de Beatriz é retirar uma moeda e deixar 8 moedas para

Ana e assim sobram duas possibilidades para Ana tentar a vitória:

- $11 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-2}} 9 \xrightarrow{\mathbf{B}_{-1}} 8 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-1}} 7 \xrightarrow{\mathbf{B}_{-2}} 5 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-1}} 4 \xrightarrow{\mathbf{B}_{-1}} 3$

- $11 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-2}} 9 \xrightarrow{\mathbf{B}_{-1}} 8 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-2}} 6 \xrightarrow{\mathbf{B}_{-1}} 5 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-1}} 4 \xrightarrow{\mathbf{B}_{-1}} 3$

Observação: Ana tinha uma estratégia vencedora, bastava ter retirado 3 moedas na primeira jogada.

Veja as possíveis jogadas seguintes, onde Beatriz tentaria (sem sucesso!) a vitória.

- $11 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-3}} 8 \xrightarrow{\mathbf{B}_{-1}} 7 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-2}} 5 \xrightarrow{\mathbf{B}_{-1}} 4 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-1}} 3$

- $11 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-3}} 8 \xrightarrow{\mathbf{B}_{-2}} 6 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-1}} 5 \xrightarrow{\mathbf{B}_{-1}} 4 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-1}} 3$

(b) Digamos que Ana seja a primeira a jogar.

A estratégia de Ana é retirar 2 moedas e deixar 13 moedas para Beatriz

Veja as tentativas (sem sucesso) de Beatriz para tentar a vitória:

1. Beatriz tira uma moeda e deixa 12. Neste caso Ana tira uma e deixa 11:

- $15 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-2}} 13 \xrightarrow{\mathbf{B}_{-1}} 12 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-1}} 11$

Veja como continua:

- $15 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-2}} 13 \xrightarrow{\mathbf{B}_{-1}} 12 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-1}} 11 \xrightarrow{\mathbf{B}_{-1}} 10 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-2}} 8$
- $15 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-2}} 13 \xrightarrow{\mathbf{B}_{-1}} 12 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-1}} 11 \xrightarrow{\mathbf{B}_{-2}} 9 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-1}} 8$

Agora estamos numa situação parecida com o item a) e é possível mostrar que Ana tem estratégia vencedora!

2. Beatriz tira 2 moedas e deixa 11. Neste caso Ana tira 3 e deixa 8:

- $15 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-2}} 13 \xrightarrow{\mathbf{B}_{-2}} 11 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-3}} 8$

3. Beatriz tira 3 moedas e deixa 10. Neste caso Ana tira 2 e deixa 8:

- $15 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-2}} 13 \xrightarrow{\mathbf{B}_{-3}} 10 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-2}} 8$

4. Beatriz tira 4 moedas e deixa 9. Neste caso Ana tira 1 e deixa 8:

- $15 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-2}} 13 \xrightarrow{\mathbf{B}_{-4}} 9 \xrightarrow{\mathbf{A}_{-1}} 8$

Nos casos 2, 3 e 4 estamos numa situação parecida com o item (a) e é possível mostrar que Ana tem estratégia vencedora!

Exemplo 6 – Geral – Adaptado OBM 2014 – N3 – Fase 3

Temos dois jogadores e $n \geqslant 2$ moedas numa mesa, eles jogam alternadamente de acordo com as seguintes regras:

(i) o primeiro a jogar retira no mínimo uma moeda, mas não todas.

(ii) quem jogar a seguir pode retirar no mínimo uma moeda e no máximo o dobro do número de moedas que o jogador anterior retirou.

(iii) ganha quem retirar a última moeda.

Questão: Quais são as posições perdedoras?

Novamente devemos fazer uma ressalva: o vencedor é indicado de acordo com a quantidade de moedas no início do jogo.

O primeiro jogador tem estratégia vencedora: **V**

O segundo jogador tem estratégia vencedora: **P**

Observe que $n = 2$ e $n = 3$ são posições perdedoras.

Já $n = 4$ é uma posição vencedora, basta retirar uma moeda.

2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	$\cdots$
P	**P**	**V**												$\cdots$

Se $n = 5$, então o segundo jogador tem estratégia vencedora.

2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	$\cdots$
P	**P**	**V**	**P**	**V**							$\cdots$

Se $n = 6$ basta o primeiro jogador retirar uma moeda.

2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	$\cdots$
P	**P**	**V**	**P**	**V**							$\cdots$

Se $n = 7$ basta o primeiro jogador retirar duas moedas.

2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	$\cdots$
P	**P**	**V**	**P**	**V**	**V**						$\cdots$

Agora se $n = 8$, o segundo jogador tem estratégia vencedora.

2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	$\cdots$
P	**P**	**V**	**P**	**V**	**V**	**P**					$\cdots$

Proposição

Temos dois jogadores e $n \geqslant 2$ moedas, eles jogam alternadamente de acordo com as seguintes regras:

(i) o primeiro a jogar retira no mínimo uma moeda, mas não todas.

(ii) quem jogar a seguir deve retirar no mínimo uma moeda e no máximo o dobro do número de moedas que o jogador anterior retirou.

(iii) ganha quem retirar a última moeda.

Neste jogo as posições perdedoras são aquelas em que n é um número da sequência de Fibonacci: $2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

Além disso, o primeiro jogador tem estratégia vencedora se n não for um número da sequência acima.

Vejamos alguns exemplos:

$n = 20$: A estratégia é fazer a representação de Zeckendorf de

$20 = 13 + 5 + 2$ e o primeiro jogador deve retirar o menor número dessa soma, no caso 2 moedas.

$n = 30$: A estratégia é fazer a representação de Zeckendorf de

$30 = 21 + 8 + 1$ e o primeiro jogador deve retirar o menor número dessa soma, no caso 1 moeda. Neste caso também pode usar como estratégia tirar $8+1 = 9$ moedas, visto que o segundo jogador poderá retirar no máximo $2 \times 9 = 18$ moedas.

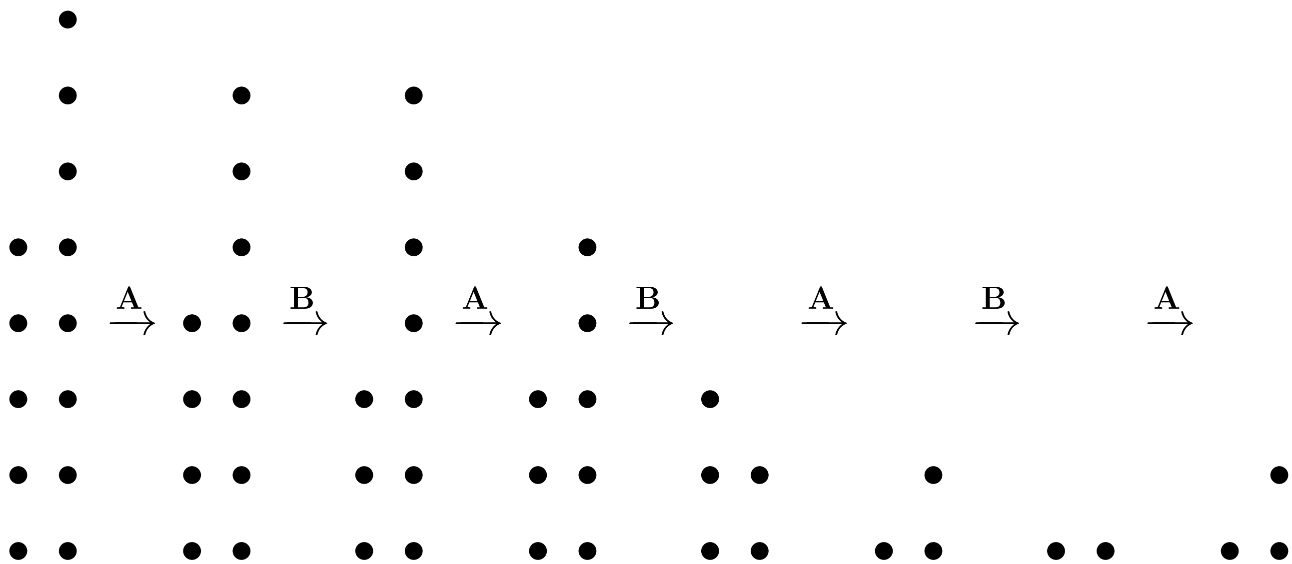
$n = 103$: A estratégia é fazer a representação de Zeckendorf de

$107 = 89+13+5$ e o primeiro jogador deve retirar o menor número dessa soma, no caso 5 moeda. Neste caso também pode usar como estratégia tirar $13 + 5 = 18$ moedas, visto que o segundo jogador poderá retirar no máximo $2 \times 18 = 36$ moedas.

Exemplo 7 – O Jogo de Wythoff

Dois jogadores jogam alternadamente retirando palitos de duas pilhas sobre uma mesa. Na sua vez, cada jogador pode retirar qualquer quantidade de palitos de uma pilha ou a mesma quantidade de palitos de ambas as pilhas. O ganhador é aquele que retirar o último palito.

Questão: Quais são as posições perdedoras?



$$5\ \ 8 \xrightarrow{\mathbf{A}} 4\ \ 7 \xrightarrow{\mathbf{B}} 3\ \ 7 \xrightarrow{\mathbf{A}} 3\ \ 5 \xrightarrow{\mathbf{B}} 3\ \ 2 \xrightarrow{\mathbf{A}} 1\ \ 2 \xrightarrow{\mathbf{B}} 1\ \ 1 \xrightarrow{\mathbf{A}} 0\ \ 0$$

15																♕
14																
13																
12																
11																
10																
9																
8																
7																
6																
5																
4																
3																
2																
1																
0																
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

15	V	V	V	V	V	V	V	V	V	P	V	V	V	V	V	V
14	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
13	V	V	V	V	V	V	V	V	P	V	V	V	V	V	V	V
12	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
11	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
10	V	V	V	V	V	V	P	V	V	V	V	V	V	V	V	V
9	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	P
8	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	P	V	V
7	V	V	V	V	P	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
6	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	P	V	V	V	V	V
5	V	V	V	P	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
4	V	V	V	V	V	V	V	P	V	V	V	V	V	V	V	V
3	V	V	V	V	V	P	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
2	V	P	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
1	V	V	P	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
0	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

15										P						
14																
13									P							
12																
11																
10							P									
9																P
8														P		
7					P											
6											P					
5				P												
4								P								
3						P										
2		P														
1			P													
0																
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

Teorema: As posição perdedoras (x_n, y_n) do Jogo de Wythoff com $x_n < y_n$ são dadas por $(x_n, y_n) = (\lfloor \alpha n \rfloor, \lfloor (\alpha+1)n \rfloor)$, onde
$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

As posições perdedoras satisfazem as seguintes condições:

(a) Cada número natural aparece exatamente uma vez.

(b) $y_n - x_n = n$.

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
x_n	**1**	**3**	**4**	**6**	**8**	**9**	**11**	**12**	**14**	**16**	**17**	**19**	**21**	**22**	**24**	**25**
y_n	**2**	**5**	**7**	**10**	**13**	**15**	**18**	**20**	**23**	**26**	**28**	**31**	**34**	**36**	**39**	**41**

Conjectura: As posição perdedoras no Jogo de Wythoff são da forma (m, n), onde m termina em 1 ou numa quantidade par de zeros na representação de Zeckendorf e n tem representação idêntica à m com o acréscimo de um zero ao final.

São posições perdedoras (m, n):

$(1,\ 2),\ (3,\ 5),\ (4,\ 7),\ (6,\ 10),\ (8,\ 13),\ (9,\ 15),\ (12,\ 20),\ \ldots,\ (40,\ 65),\ \ldots$

Vejamos a representação de Zeckendorf dos pares acima:

$(1,\ 2) = (1_F,\ 10_F),\ (3,\ 5) = (100_F,\ 1000_F),\ (4,\ 7) = (101_F,\ 1010_F),$

$(6,\ 10) = (1001_F,\ 10010_F),\ (8,\ 13) = (10000_F,\ 100000_F),$

$(9,\ 15) = (10001_F,\ 100010_F),\ (12,\ 20) = (10101_F,\ 101010_F),$

$(40,\ 65) = (10001001_F,\ 100010010_F)$

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
x_n	**1**	**3**	**4**	**6**	**8**	**9**	**11**	**12**	**14**	**16**	**17**	**19**	**21**	**22**	**24**	**25**
y_n	**2**	**5**	**7**	**10**	**13**	**15**	**18**	**20**	**23**	**26**	**28**	**31**	**34**	**36**	**39**	**41**

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$(x_n)_F$	**1**	**100**	**101**	**1001**	**10000**	**10001**	**10100**
$(y_n)_F$	**10**	**1000**	**1010**	**10010**	**100000**	**100010**	**101000**

n	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
$(x_n)_F$	**10101**	**100001**	**100100**	**100101**	**101001**
$(y_n)_F$	**101010**	**1000010**	**1001000**	**1001010**	**1010010**

n	**13**	**14**	**15**	**16**
$(x_n)_F$	**10000000**	**10000001**	**10000100**	**10000101**
$(y_n)_F$	**100000000**	**100000010**	**100001000**	**100001010**

Referências

[1] Feitosa, S. **A Função Parte Inteira - I**.
https://poti.impa.br/uploads/material_teorico/a2ldv0miyp4ow.pdf

[2] Ferguson, T. S. **Game Theory**.
http://www.inf.ufsc.br/ joao.dovicchi/pos-ed/pos/games/comb.pdf

[3] Holanda, B. **Jogos – Pólos Olímpicos de Treinamento**.
http://poti.impa.br/upload/Aula%2006%20-%20Jogos45.pdf

[4] Lopes, D. **Jogos: Cê manja ou Nim? Semana Olímpica 2017**.
https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/02/Davi-Lopes-Jogos-C%C3%AA-Manja-ou-Nim.pdf

[5] MORGADO, A. C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 10.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[6] ROSEN, K. H. **Matemática discreta e suas aplicações**. 6.ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.

[7] Severo, F. **O Jogo de Wythoff – I**.
https://www.youtube.com/watch?v=fh150z7YK2Y

[8] Shine, C. **Contagem Dupla**.
https://www.urantiagaia.org/educacional/matematica/combinatoria3/Aula03-Contagem_Dupla.pdf

[9] Steffenon, R. R.; Guarnieri, F. M. **Belos Problemas de Matemática Discreta**. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.