Teorema 1. Seja $Q(n)$ e $S(n)$ a quantidade e a soma dos dígitos do número n, respectivamente, então

$$10^{Q(n)-1} \leq n < 10^{Q(n)}$$

e

$$S(n) \leq 9 \cdot Q(n).$$

1. Encontre todos os números inteiros e positivos, menores que 1000, que são iguais a seis vezes a soma de seus dígitos.

2. (*) Encontre todos os números inteiros e positivos que são iguais a seis vezes a soma de seus dígitos.

3. Encontre todos os números naturais n tais que a soma dos dígitos de 5^n é igual a 2^n.

4. (Maio) Inês escolheu quatro dígitos distintos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Formou com eles todos os possíveis números de quatro cifras distintas e somou todos esses números de quatro cifras. O resultado é 193314. Encontre os quatro dígitos que Inês escolheu.

5. (Rioplatense) Três números de três algarismos são dados tais que eles possuem em sua representação decimal todos os algarismos de 1 à 9, exceto o zero. A soma dos três números é 1665. O primeiro algarismo de cada número é permutado com o último algarismo do mesmo número, formando três novos números de três algarismos. Qual a soma dos três novos números?

6. Sejam x e y dois números de dois algarismos cada. Sabe - se que $x = 2y$, e que um dos algarismos de y é a soma e o outro a diferença dos algarismos de x. Achar todos os possíveis valores de x e y.

7. Determine todos os inteiros positivos de dois algarismos tais que a diferença entre o número e o produto de seus algarismos seja 12.

8. (Rioplatense) Determine todos os números de dois algarismos que são múltiplos da soma de seus algarismos.

9. Determine o número natural n de quatro algarismos $abcd$ que seja múltiplo de 11, tal que o número de dois algarismos ac seja múltiplo de 7 e $a + b + c + d = d^2$.

10. Seja

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

um número inteiro, em que n é ímpar. Então N é um múltiplo de 99 se, e somente se, o número

$$\overline{a_n a_{n-1}} + \overline{a_{n-2} a_{n-3}} + \ldots + \overline{a_1 a_0}$$

é um múltiplo de 99. (A notação $\overline{ab}$ se refere ao número de dois algarismos com a ocupando a casa das dezenas e b ocupando a casa das unidades.)

11. (Cone Sul) Ache um número de três algarismos, sabendo que a soma dos mesmos é 9, o produto é 24 e o número, quando lido da direita para esquerda, é igual a $\frac{27}{38}$ do número original.

12. (Cone Sul) O inteiro positivo n tem 1994 algarismos. Desses, 14 são iguais a 0 e as quantidades de vezes que os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 aparecem são respectivamente proporcionais a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Mostre que n não pode ser um quadrado perfeito.

13. Paladino pediu para Antonio escolher, em segredo, um número natural com, pelo menos, três algarismos (no sistema decimal). Em seguida pediu, ainda, que efetuasse uma permutação qualquer dos seus algarismos, obtendo um novo número, e que subtraísse o menor do maior dos dois números. Finalmente, pediu que Antonio retivesse um dos algarismos diferentes de zero desse novo número e divulgasse os restantes. Paladino, em poucos segundos, descobriu o número retido. Explique como ele fez isto!

14. Ache um número de 6 algarismos $abcdef$ tal que multiplicando esse número por 6 encontraremos como resultado o número $defabc$.