Pombos, Gavetas e Meias

Maria Clara Werneck
mclarawerneck@gmail.com

1 Introdução

O Princípio da Casa dos Pombos (PCP) também é conhecido como Princípio das Gavetas de Dirichlet. É um método atribuído a Dirichlet, um dos primeiros matemáticos a utilizá-lo para resolver problemas dificeís.

A ideia é que quer provar que **com certeza** existe uma quantidade de objetos com certa propriedade. Mas o que de fato diz o Princípio da Casa dos Pombos? Entre várias versões, a mais simples é:

Se $n + 1$ pombos são colocados em n casas, então existe pelo menos dois pombos na mesma casa.

A demonstração sai por absurdo. Suponha que não existe nenhuma casa com mais de 2 pombos. Então, o número máximo de pombos a se distribuir pelas casas é $n \times 1 = n$ que é menor que o total de pombos $n + 1$, contradição.

Antes de continuar para os problemas, note que há algumas perguntas a serem feitas quando utilizando PCP. Quem são as casas? Quem são os pombos? Quantas casas são? **Não é fácil ver o que você deve usar, mas esse método pode facilitar sua solução! :)**

2 Problemas Iniciais

Problema 1. Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos dois deste pontos estão em um distância menor que ou igual a $\sqrt{2}$.

Problema 2. Dados 1001 inteiros, mostre que é possível escolher dois deles de modo que sua diferença seja divisível por 1000.

Problema 3. Mostre que, em um grupo de cinco pessoas, duas delas têm o mesmo número de amigos no grupo.

Problema 4. Qual o maior número de quadrados em um tabuleiro 8×8 que pode ser colorido de verde de modo que em qualquer triminó do tabuleiro haja no máximo 2 quadrados coloridos de verde?

Problema 5. Qual o menor número de quadrados em um tabuleiro 8×8 que pode ser colorido de verde de modo que em qualquer triminó do tabuleiro há pelo menos um quadrado colorido de verde?

Problema 6. Dez estudantes resolveram um total de 35 problemas em uma olimpíada de matemática. Cada problema foi resolvido por exatamente um estudante. Pelo menos um dos estudantes resolveu exatamente um problema, pelo menos um dos estudantes resolveu exatamente dois problemas e pelo menos um dos estudantes resolveu exatamente três problemas. Prove que pelo menos um estudante resolveu pelo menos cinco problemas.

Problema 7. Qual o maior número de reis que podem ser colocados em um tabuleiro de xadrez de modo que nenhum par deles esteja em cheque?

Problema 8. Prove que existem duas potências de dois que diferem por um múltiplo de 2021.

Problema 9. Há 6 pessoas em uma festa. Considerando que se conhecer é recíproco, mostre que existem 3 pessoas que se conhecem ou 3 pessoas que não se conhecem.

Problema 10. Mostre que $(a - b) \cdot (a - c) \cdot (b - c)$ é par, para quaisquer a, b e c inteiros.

3 Problemas

Problema 11. (OBM 2012) Quantos elementos tem o maior subconjunto de $\{1, 2, 3, ..., 25\}$ que não contêm dois números distintos cujo produto é um quadrado perfeito?

Problema 12. Prove que se escolhermos mais do que n números do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, então um deles será múltiplo de outro. Isso pode ser evitado com n números?

Problema 13. (OBM 2008) Vamos chamar de garboso o número que possui um múltiplo cujas quatro primeiras casas de sua representação decimal são 2008. Por exemplo, 7 é garboso, pois 200858 é múltiplo de 7 e começa com 2008. Observe que $200858 = 28694 \times 7$. Mostre que todos os inteiros positivos são garbosos.

Problema 14. (IMO 1991) Mostre que existem infinitos multiplos de 1991 da forma 19999 . . . 99991.

Problema 15. (Putnam) O plano é pintado usando três cores. Prove que existem dois pontos de mesma cor distando exatamente um metro.

Problema 16. (Torneio das Cidades 1994) Existem 20 alunos em uma escola. Quaisquer dois deles possui um avô em comum. Prove que pelo menos 14 deles possui um avô em comum.

Problema 17. (Rioplatense 2017) João tem 13 cartas, cada uma tem um lado verde e um lado azul. Em cada lado de cada carta é escrito um número inteiro. Prove que podemos escolher três cartas de modo que a soma dos três números escritos nas faces azuis é múltiplo de 3 e a soma dos três números escritos nas faces verdes também seja múltiplo de 3.

4 Referências

[1] Bruno Holanda, Semana Olímpica 2018. `https://www.obm.org.br/content/uploads/2018/01/Combinatoria_casa_pombos.pdf`,
[2] Samuel Barbosa, Semana Olímpica 2020, `https://www.obm.org.br/content/uploads/2020/02/23_SO_Samuel_Feitosa_Aula_Nivel_1_Casa_dos_Pombos_compressed.pdf`.