25ª SEMANA OLÍMPICA

• Nível 2 • Aplicando Teoremas Poderosos de TN •

Profª Ana Paula Chaves

apchaves@ufg.br

https://sites.google.com/ufg.br/apchaves

1. WARM-UP

Problema 1.1. Encontre o resto de $5^{2019}+19^{1986}$ quando dividido por 9.

Problema 1.2. Mostre que não existe inteiro x tal que $103 \mid x^3-2$.

Problema 1.3 (OBM 1991)**.** Demonstre que existem infinitos múltiplos de 1991 que são da forma $19999\ldots99991$.

Problema 1.4. Prove que para todo a inteiro, temos $a^{561} \equiv a \pmod{561}$. [1]

Problema 1.5 (AIME 1992)**.** Encontre a soma de todos os números racionais, menores que 10, cujo denominador é 30 quando escritos de forma irredutível.

Problema 1.6 (AIME 2012)**.** Para um inteiro positivo p, dizemos que $n \in \mathbb{N}$ é $p-$seguro, se n difere, em valor absoluto, por mais de 2 de todos os múltiplos de p. Por exemplo. o conjunto dos números $10-$seguros é $\{3,4,5,6,7,13,14,15,16,17,23,\ldots\}$. Encontre quantos são os inteiros positivos menores que ou iguais à 10000 que são simultaneamente $7-$seguros, $11-$seguros e $13-$seguros.

Problema 1.7 (Estônia 2000)**.** Prove que não é possível dividir qualquer conjunto de 18 inteiros consecutivos em dois conjuntos disjuntos A e B tais que o produto dos elementos de A seja igual ao produto dos elementos de B.

Problema 1.8. Mostre que, se p é um primo ímpar, então para todo inteiro positivo $n<p$, temos

$$(n-1)!(p-n)! \equiv (-1)^n \pmod{p}.$$

Problema 1.9 (Aus-Pol 1996)**.** Mostre que não existem inteiros não negativos k e m tais que $k!+48=48\cdot(k+1)^m$.

Problema 1.10 (IMO 2005)**.** Considere a sequência $a_1,a_2,\ldots$, dada por

$$a_n=2^n+3^n+6^n-1,\ n\geq 1.$$

Determine todos os inteiros positivos que são coprimos com todos os termos da sequência.

Problema 1.11 (USAMO 2008/1)**.** Mostre que, para cada n inteiro positivo, existem $k_0,k_1,\ldots,k_n$ inteiros positivos maiores que 1, dois-a-dois coprimos, tais que $k_0k_1\cdots k_n-1$ é o produto de dois inteiros consecutivos.

[1] Números compostos que satisfazem o Pequeno Teorema de Fermat, tais como o 561, são conhecidos como *números de Carmichael*. Na realidade, existem infinitos números de Carmichael e 561 é o menor deles.

2. Problemas Propostos

Problema 2.1. Encontre os três últimos dígitos de 401^{402}.

Problema 2.2. Prove que se a e b são inteiros quaisquer e p é um número primo, então $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.

Problema 2.3 (IMO 1991)**.** Seja $n > 6$ um inteiro e sejam $a_1, a_2, \ldots, a_k$ todos os inteiros positivos, menores que n, coprimos com n. Se

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_k - a_{k-1} > 0,$$

mostre que n tem que ser um primo ou uma potência de 2.

Problema 2.4. Prove que para todo inteiro positivo n, $n \neq 2$ e $n \neq 6$, temos

$$\phi(n) \geq \sqrt{n}.$$

Problema 2.5. Mostre que existem infinitos inteiros positivos n tais que

$$\phi(n) = \frac{n}{3}.$$

Problema 2.6 (Coreia 1998)**.** Para um inteiro positivo n, seja $\psi(n)$ a quantidade de primos que divide n. Mostre que se $\phi(n)$ divide $n-1$ e $\psi(n) \leq 3$, então n é primo.

Problema 2.7 (Mandelbrot 1994)**.** Quatrocentas pessoas estão de pé em um círculo. Você marca uma pessoa, então pula k pessoas, e marca outra, pula k, e assim por diante, continuando até que você marque uma pessoa pela segunda vez. Para quantos valores positivos de k, menores que 400, todas as pessoas do círculo serão marcadas pelo menos uma vez?

Problema 2.8 (Romênia 1997)**.** Seja $a > 1$ um inteiro. Mostre que o conjunto

$$S = \{a^2 + a - 1, a^3 + a^2 - 1, a^4 + a^3 - 1, \ldots\},$$

contém um subconjunto infinito cujos elementos são dois a dois coprimos.

Problema 2.9. (Índia 2010) Existe algum número n divisível por 103 tal que $2^{2n+1} \equiv 2 \pmod{n}$?

Problema 2.10. (ISL 2005) Sejam a, b inteiros positivos tais que $b^n + n$ divide $a^n + n$ para todo inteiro positivo n. Prove que $a = b$.

Problema 2.11. (Índia 2001) Seja $p > 3$ um número primo. Para cada $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, defina x_k como o único inteiro no conjunto $\{1, \ldots, p-1\}$ tal que $kx_k \equiv 1 \pmod{p}$ e seja $kx_k = 1 + pn_k$. Prove que:

$$\sum_{k=1}^{p-1} kn_k \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p}.$$

Problema 2.12. Seja n um inteiro positivo. Calcule $mdc(n!+1, (n+1)!)$.

Problema 2.13. Prove que a sequência $A(n) = n!^2 - n! + 1$ contém infinitos números compostos.

Problema 2.14. Prove que, para todo inteiro positivo n, existe uma sequência de n inteiros positivos todos livres de quadrados.

Problema 2.15. (Sierpiński) Prove que existe um inteiro positivo k tal que os números da forma $k \cdot 2^n + 1$ são todos compostos para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Problema 2.16. (IMO 1989) Prove que para todo inteiro positivo n, existe um conjunto de n inteiros positivos consecutivos tais que nenhum deles é uma potência de primo.

Problema 2.17. Encontre todos os números primos p tais que $5^{p^2}+1$ é divisível por p.

Problema 2.18. . (1) Seja a um inteiro positivo. Mostre que qualquer fator primo maior que 2 de a^2+1 é da forma $4m+1$.

(2) Prove que existem infinitos primos da forma $4m+1$.

Problema 2.19. Mostre que, para todo primo $p>5$, o número

$$\underbrace{111\dots1}_{p-1},$$

é divisível por p.

Problema 2.20 (OCM 2007)**.** Ache todos os primos p,q tais que p^p+q^q+1 é múltiplo de pq.

Problema 2.21. Mostre que, se p é um primo congruente à 3 módulo 4, então não existe a tal que

$$a^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Problema 2.22. Mostre que dado qualquer p primo, $p^{p+1}+(p+1)^p$ não é um quadrado perfeito.

Problema 2.23 (Ucrânia 1997)**.** Encontre o menor inteiro n tal que, entre quaisquer n inteiros, permitindo repetição, existem 18 inteiros cuja soma é divisível por 18.

Problema 2.24 (Bulgária 1995)**.** Encontre a quantidade de inteiros $n>1$ para os quais $a^{25}-a$ é divisível por n, para qualquer inteiro a.

Problema 2.25 (IMO 1963)**.** .

(a) Encontre todos os n inteiros positivos tais que 7 divide 2^n-1.

(b) Mostre que para todo n inteiro positivo, o número 2^n+1 não é divisível por 7.

Problema 2.26. Mostre que para todo p primo e todo $0\le k\le p-1$, temos

$$\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}.$$

Problema 2.27. Encontre todos os inteiros positivos a e n tais que $a^n=(a-1)!+1$.

Problema 2.28 (Irlanda 1996)**.** Para cada n inteiro positivo, encontre o máximo divisor comum entre $n!+1$ e $(n+1)!$.

Problema 2.29 (Seletiva da IMO - Romênia 1986)**.** Seja $p\ge 3$ um primo e seja σ uma permutação de $\{1,2,\dots,p-1\}$. Prove que existem $i\ne j$ tais que $p \mid i\sigma(i)-j\sigma(j)$.

Problema 2.30. Seja p um primo ímpar. Mostre que

$$1^2\cdot 3^2\cdots(p-2)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$$

e

$$2^2\cdot 4^2\cdots(p-1)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}.$$

Problema 2.31. Mostre que a sequência $a_n=(n!)^2-n!+1$ contém infinitos números compostos.

Problema 2.32. Prove que, se p é um primo ímpar, então o resto da divisão de $(p-1)!$ por $p(p-1)$ é $p-1$.

Problema 2.33. Seja $N=1234567\dots4344$ o número de 79 dígitos, obtido escrevendo os inteiros de 1 até 44 concatenados. Qual é o resto que N deixa quando dividido por 45?

Problema 2.34 (IMO 1989)**.** Mostre que, para todo n inteiro positivo, existem n inteiros positivos consecutivos, nenhum dos quais é potência de primo.

Problema 2.35. Mostre que, dados k e n números naturais, é possível encontrar k números consecutivos, cada um dos quais tem pelo menos n divisores primos distintos.

Problema 2.36 (Olimpíada de Maio 2013)**.** É possível escrever 100 números ímpares numa fila de tal forma que a soma de cada 5 adjacentes seja um quadrado perfeito e que a soma de cada 9 números adjacentes também seja um quadrado perfeito?

Problema 2.37 (IMO 2009)**.** Seja n um inteiro positivo e sejam $a_1, a_2, \dots, a_k$, com $k \geq 2$, inteiros distintos do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ tais que n divide $a_i(a_{i+1} - 1)$ para $i = 1, 2, \dots, k-1$. Prove que n não divide $a_k(a_1 - 1)$.

Problema 2.38 (IMO 2003)**.** Seja p um primo ímpar. Mostre que existe um primo q tal que, para todo n, o número $n^p - p$ não é divisível por q.

Problema 2.39. Um inteiro positivo n é chamado de *auto-replicante* se os últimos dígitos de n^2 formam o número n. Por exemplo, 25 é auto-replicante pois $25^2 = 625$. Determine todos os números auto-replicantes com exatamente 4 dígitos.

Problema 2.40 (OBM 2017)**.** Demonstre que, para todo n inteiro positivo, existem inteiros positivos a e b, sem fatores primos em comum, de modo que $a^2 + 2017b^2$ possui mais de n fatores primos distintos.

Referências

[1] Andreescu, T., Andrica, D. and Feng Z., *104 Number Theory Problems*, Birkhauser, Boston, MA, 2007.

[2] F. E. Brochero Martinez, C. G. Moreira, N. C. Saldanha, E. Tengan *Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*, Projeto Euclides, IMPA, 2010.

[3] Carneiro, E., Campos, O. e Paiva, F. *Olimpíadas Cearenses de Matemáatica 1981-2005 (Níveis Júnior e Senior)*, Ed. Realce, 2005.

[4] Feitosa, S. B. , Holanda, B., Lima, Y. e Magalhães, C. T. *Treinamento Cone Sul 2008.* Fortaleza, Ed. Realce, 2010.

[5] Fomin, D. and Kirichenko, A. *Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991*, MathPro Press, Westford, MA, 1994.

[6] Fomin, D., Genkin, S. and Itenberg, I. *Mathematical Circles, Mathematical Words, Vol. 7*, American Mathematical Society, Boston, MA, 1966.

[7] Niven, I., Zuckerman, H. S. and Montgomery, H. L. *An Introduction to the Theory of Numbers.*

[8] Art of Problem Solving - https://artofproblemsolving.com