COMBINATÓRIA DE OURO NA IMO

PROF. LUCIANO MONTEIRO DE CASTRO
lucianogmcastro@gmail.com

Problemas

1. Um *local* é um ponto (x, y) no plano tal que x e y são ambos inteiros positivos menores ou iguais a 20. Inicialmente, cada um dos 400 locais está vazio. Ana e Beto colocam pedras alternadamente com Ana a iniciar. Na sua vez, Ana coloca uma nova pedra vermelha num local vazio tal que a distância entre quaisquer dois locais ocupados por pedras vermelhas seja diferente de $\sqrt{5}$. Na sua vez, Beto coloca uma nova pedra azul em qualquer local vazio. (Um local ocupado por uma pedra azul pode estar a qualquer distância de outro local ocupado.) Eles param quando um dos jogadores não pode colocar uma pedra. Determine o maior K tal que Ana pode garantir que ela coloca pelo menos K pedras vermelhas, não importando como Beto coloca suas pedras azuis.

2. Dizemos que um conjunto finito $\mathcal{S}$ de pontos do plano é *equilibrado* se, para cada dois pontos diferentes A e B de $\mathcal{S}$, existe um ponto C de $\mathcal{S}$ tal que $AC = BC$. Dizemos que $\mathcal{S}$ é *descentrado* se, para cada três pontos diferentes A, B e C de $\mathcal{S}$, não existe um ponto P de $\mathcal{S}$ tal que $PA = PB = PC$.

3. Determine todos os inteiros positivos n tais que pode-se preencher cada casa de um tabuleiro $n \times n$ com uma das letras I, M e O de tal forma que ambas as condições seguintes sejam satisfeitas:

   - em cada linha e em cada coluna, exatamente um terço das casas tenha um I, um terço tenha um M e um terço tenha um O.
   - em cada diagonal formada por um número de casas que seja múltiplo de 3, exatamente um terço das casas tenha um I, um terço tenha um M e um terço tenha um O.

   Observação: As linhas e as colunas de um tabuleiro $n \times n$ são numeradas de 1 a n. Assim, cada casa corresponde a um par de inteiros positivos (i, j) com $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Para $n > 1$, o tabuleiro tem $4n - 2$ diagonais de dois tipos. Uma diagonal do primeiro tipo é formada por todas as casas (i, j) para as quais $i + j$ é igual a uma constante. Uma diagonal do segundo tipo é formada por todas as casas (i, j) para as quais $i - j$ é igual a uma constante.

4. Sejam n e k números inteiros positivos tais que $k \geq n$ e $k - n$ é um número par. São dadas $2n$ lâmpadas numeradas de 1 a $2n$, cada uma das quais pode estar *acesa* ou *apagada*. Inicialmente todas as lâmpadas estão apagadas. Uma *operação* consiste em alterar o estado de exatamente uma das lâmpadas (de acesa para apagada ou de apagada para acesa). Consideremos sequências de operações.

   Seja N o número de sequências com k operações após as quais as lâmpadas de 1 a n estão todas acesas e as lâmpadas de $n + 1$ a $2n$ estão todas apagadas.

   Seja M o número de sequências com k operações após as quais as lâmpadas de 1 a n estão todas acesas e as lâmpadas de $n + 1$ a $2n$ estão todas apagadas, e durante as quais todas as lâmpadas de $n + 1$ a $2n$ permanecem sempre apagadas.

   Determine a razão $\dfrac{N}{M}$.

5. Numa competição de matemática na qual foram propostos 6 problemas, quaisquer dois problemas foram resolvidos por mais de 2/5 dos estudantes. Além disso, nenhum estudante resolveu todos os 6 problemas. Mostre que existem pelo menos 2 estudantes que resolveram 5 problemas cada um.

6. Há $n \geqslant 2$ segmentos no plano tais que cada par de segmentos se intersecta num ponto interior a ambos e não há três segmentos que tenham um ponto em comum. Geoff deve escolher um dos extremos de cada segmento e colocar sobre ele um sapo, virado para o outro extremo. Depois ele baterá palmas $n-1$ vezes. Cada vez que ele bater as mãos, cada sapo saltará imediatamente para a frente até o próximo ponto de interseção sobre o seu segmento. Os sapos nunca mudam a direção dos seus saltos. Geoff deseja colocar os sapos de tal forma que dois sapos nunca ocupem ao mesmo tempo o mesmo ponto de interseção. (a) Prove que se n é ímpar, Geoff sempre tem uma maneira de realizar o seu desejo. (b) Prove que se n é par, Geoff nunca realiza o seu desejo.

7. (IMO 2002) Sejam $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ círculos de raio 1 no plano, onde $n \geq 3$. Seus centros são $O_1, O_2, \ldots, O_n$, respectivamente. Suponha que não exista reta que intercepte mais que dois dos círculos. Prove que

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

8. Sir Alex plays the following game on a row of 9 cells. Initially, all cells are empty. In each move, Sir Alex is allowed to perform exactly one of the following two operations:

(1) Choose any number of the form 2^j, where j is a non-negative integer, and put it into an empty cell.

(2) Choose two (not necessarily adjacent) cells with the same number in them; denote that number by 2^j. Replace the number in one of the cells with 2^{j+1} and erase the number in the other cell.

At the end of the game, one cell contains the number 2^n, where n is a given positive integer, while the other cells are empty. Determine the maximum number of moves that Sir Alex could have made, in terms of n.