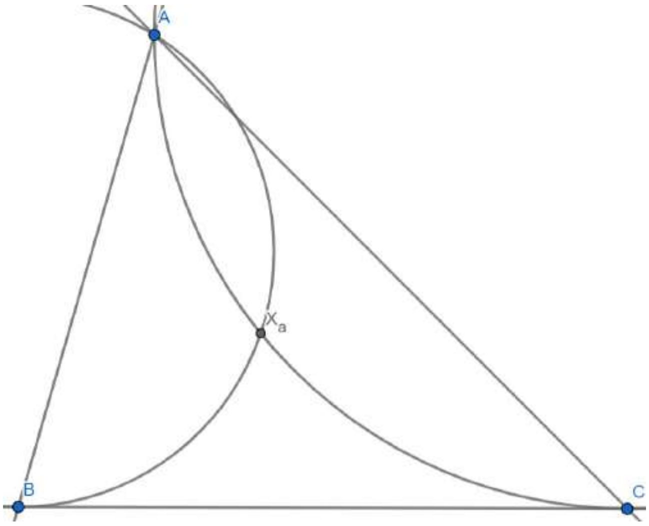
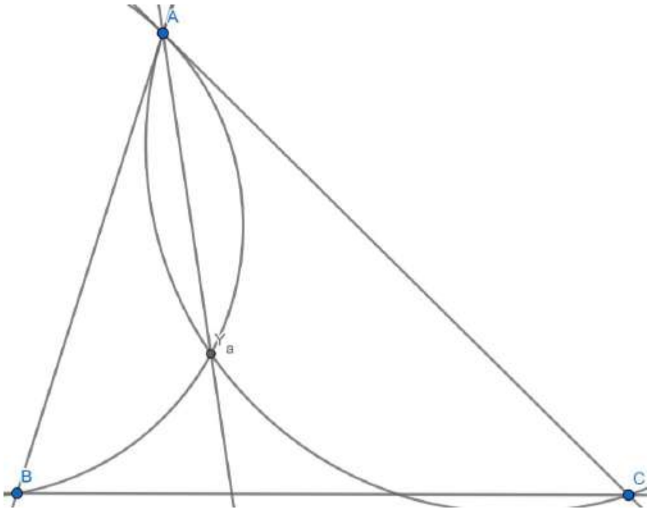
# Os pontos Humpty e Dumpty

Bernardo P. Trevizan

18 de julho de 2022

## 1 Definição




Sejam $\Gamma_B$ o círculo que passa por $A$ e $B$ tangente a $BC$ e $\Gamma_C$ o círculo que passa por $A$ e $C$ tangente a $BC$. Definimos o ponto Humpty $X_a$ como a intersecção de $\Gamma_B$ e $\Gamma_C$ diferente de $A$.

Sejam $\Omega_B$ o círculo que passa por $A$ e $B$ tangente a $AC$ e $\Omega_C$ o círculo que passa por $A$ e $C$ tangente a $AB$. Definimos o ponto Dumpty $Y_a$ como a intersecção de $\Omega_B$ e $\Omega_C$ diferente de $A$.

## 2 Propriedades

Sejam $O$ o circuncentro e e $H$ o ortocentro do triângulo $ABC$. Também defina $D$, $E$ e $F$ os pés das alturas de $A$, $B$ e $C$, assim como $M$, $K$ e $L$ os pontos médios de $BC$, $AB$ e $AC$.

1. $X_a$ está na mediana relativa ao vértice $A$.
2. O quadrilátero $BCHX_a$ é cíclico.
3. O pentágono $AFHX_aE$ é cíclico.
4. $X_a$ é a projeção ortogonal de $H$ na mediana de $A$.
5. $Y_a$ está na simediana relativa ao vértice $A$.
6. O quadrilátero $BCOY_a$ é cíclico.
7. O pentágono $AKY_aOL$ é cíclico.
8. $Y_a$ é a projeção ortogonal de $O$ na simediana de $A$.
9. $Y_a$ é o centro da roto-homotetia que leva $BA$ em $AC$.
10. $X_a$ e $Y_a$ são conjugados isogonais.

## 3 Problemas

1. (OMCPLP 2016) Os círculos $\omega_1$ e $\omega_2$ se intersectam nos pontos $A$ e $B$, e uma reta tangente comum aos círculos intersecta $\omega_1$ e $\omega_2$ em $E$ e $F$, respectivamente. Suponha que $A$ está dentro do triângulo $BEF$. Seja $H$ o ortocentro de $BEF$ e $M$ o ponto médio de $BH$. Prove que os centros de $\omega_1$ e $\omega_2$ e $M$ são colineares.

2. Seja $ABC$ um triângulo e $P$ um ponto variável no lado $BC$. Sejam $M$ e $N$ pontos nos lados $AB$ e $AC$, respectivamente, de modo que $PM \parallel AC$ e $PN \parallel AB$. Prove que, conforme $P$ varia, o circuncírculo de $AMN$ passa por um ponto fixo

3. (Iberoamericana 2016) Os círculos $C_1$ e $C_2$ se intersectam em $A$ e $K$. A tangente comum a $C_1$ e $C_2$ mais próxima a $K$ toca $C_1$ em $B$ e $C_2$ em $C$. Seja $P$ o pé da perpendicular de $B$ para $AC$, e seja $Q$ o pé da perpendicular de $C$ para $AB$. Se $E$ e $F$ são as reflexões de $K$ pelas retas $PQ$ e $BC$, respectivamente, prove que $A, E$ e $F$ são colineares.

4. Seja $AD$ uma altura do triângulo $ABC$. Um círculo que passa por $A$ e tem centro em $AD$ é tangente externamente ao circuncírculo de $BOC$ em $X$, onde $O$ é o circuncentro do triângulo $ABC$. Mostre que $AX$ é a simediana relativa a $A$.

5. (ELMO 2014) Seja $ABC$ um triângulo com circuncentro $O$ e ortocentro $H$. Sejam $\omega_1$ e $\omega_2$ os circuncírculos dos triângulos $BOC$ e $BHC$, respectivamente. Suponha que o círculo de diâmetro $\overline{AO}$ intersecta $\omega_1$ novamente em $M$, e a reta $AM$ intersecta $\omega_1$ novamente $X$. De modo similar, suponha que o círculo de diâmetro $\overline{AH}$ intersecta $\omega_2$ novamente em $N$, e a reta $AN$ intersecta $\omega_2$ novamente $Y$. Prove que as retas $MN$ e $XY$ são paralelas.

6. Seja $Y_a$ o ponto Dumpty relativo ao vértice $A$ de um triângulo $ABC$ e $D$ o pé da altura relativa a $A$. Mostre que $Y_aD$ corta a base média relativa a $BC$ no seu ponto médio.

7. (USAMO 2008) Seja $ABC$ um triângulo acutângulo escaleno e sejam $M$, $N$, e $P$ os pontos médios de $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, e $\overline{AB}$, respectivamente. As mediatrizes de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ intersectam $AM$ nos pontos $D$ e $E$ respectivamente, e as retas $BD$ e $CE$ se intersectam no ponto $F$. Prove que o quadrilátero $ANFP$ é cíclico.

8. (USA TSTST 2015) Seja $ABC$ um triângulo escaleno. Os pontos $K_a$, $L_a$ e $M_a$ são as intersecções de $BC$ com a bissetriz interna, bissetriz externa, e mediana relativas ao vértice $A$, respectivamente. o circuncírculo de $AK_aL_a$ intersecta $AM_a$ novamente em $X_a$. Defina $X_b$ e $X_c$ analogamente. Prove que o circuncentro de $X_aX_bX_c$ esta na reta de Euler de $ABC$.

   (A reta de Euler de um triângulo é a reta passando pelo circuncentro e pelo ortocentro desse triângulo)

9. (USA TST 2005) Seja $ABC$ um triângulo acutângulo escaleno e $O$ seu circuncentro. O ponto $P$ está dentro do triângulo $ABC$ de modo que $\angle PAB = \angle PBC$ e $\angle PAC = \angle PCB$. O ponto $Q$ está em $BC$ tal que $QA = QP$. Prove que $\angle AQP = 2\angle OQB$.