Introdução a análise de sequências reais

Semana Olímpica 2022 - Nível 2

Prof. George Lucas

Definição (o famoso *Limite*): Dada uma sequência de números reais $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots)$ imagine a seguinte situação: tenho um gafanhoto pulando sobre a reta real de modo que inicialmente ele está sobre o ponto a_1, em seguida pula para o ponto a_2, depois para o ponto a_3 e assim sucessivamente. Se existe algum ponto da reta, que chamaremos de abrigo, tal que a partir de um momento o gafanhoto sempre fique "perto" desse abrigo, no sentido que para qualquer distância $\epsilon > 0$ que escolhamos então a partir de algum momento o gafanhoto sempre estará a uma distância menor que ϵ do abrigo, então chamamos tal abrigo de $\lim a_n$.

Vejamos alguns exemplos:

Se tivermos a sequência $\left(\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}, \ldots\right)$, veja que 0 seria o abrigo, uma vez que para qualquer distância $\epsilon > 0$ que escolhamos (para tentar evitar que o gafanhoto se aproxime demais do 0), a partir de um momento sua trajetória será $\frac{1}{M} \to \frac{1}{M+1} \to \frac{1}{M+2} \to \cdots$ onde M é um inteiro tal que $\frac{1}{M} < \epsilon$ e portanto todos os pontos da trajetória a partir daí ficarão a uma distância menor que ϵ do abrigo. Assim, dizemos que $\lim \ \frac{1}{n} = 0$.

Observe nessa situação que o gafanhoto, apesar de ser aproximar muuuito do abrigo, ele nunca chegará no abrigo. Assim, o limite de uma sequência não precisa ser um termo da sequência.

Um exemplo um pouco diferente é a sequência $(\pi,\ \pi,\ \pi,\ \pi,\ \ldots)$ cujo limite é exatamente π, escrevemos então $\lim \pi = \pi$.

Já a sequência $(1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots)$ onde o gafanhoto alterna os pulos entre 1 e -1 não admite nenhum abrigo ao gafanhoto. De fato, se houvesse, esse abrigo teria que ficar muuuito perto do 1 e muuuito perto do -1 , o que não acontece pois ao escolhermos $\epsilon = \frac{1}{2022}$ evitamos a construção do abrigo.

E se a sequência for dada por $a_n = -\frac{1}{n}$ se n é ímpar e $a_n = \frac{1}{n^2}$ se n é par, o gafanhoto consegue um abrigo? (Pense sobre!)

Agora que já entendemos de maneira informal o que é o limite, vamos formalizá-lo:

"Dizemos que $L = \lim a_n$ se para qualquer $\epsilon > 0$, existe um inteiro positivo $N(\epsilon)$ tal que para todo $n \geq N(\epsilon)$ temos que $|a_n - L| < \epsilon$."

Bem, aposto que quando estávamos definindo limite acima, muitos de vocês devem ter se perguntado: "uma sequência pode admitir dois ou mais limites?" Bem, a resposta é NÃO. Vamos provar isso!

Suponha que L_1 e L_2 sejam limites da sequência, sem perda de generalidade $L_1 > L_2$. Tome então $\epsilon = \frac{L_1 - L_2}{3}$. Isso significa que a partir de um momento o gafanhoto irá se encontrar num ponto x da sequência tal que $|x - L_1| < \epsilon$ e $|x - L_2| < \epsilon$, mas pela desigualdade triangular:

$2\epsilon > |x - L_1| + |L_2 - x| \geq |L_2 - L_1| = 3\epsilon$, uma contradição.

Desigualdade triangular: Dados reais quaisquer $x,\ y$ temos que $|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$

Assim, caso o limite de uma sequência exista, esse limite é único!

Quando uma sequência admite limite chamamos essa sequência de *convergente*. Caso uma sequência não seja convergente, a chamamos de *divergente*.

Definição: Dada uma sequência de números reais infinita $(a_1,\ a_2,\ \dots)$, definimos uma subsequência dela, uma sequência infinita da forma $\left(a_{j_1},\ a_{j_2},\ a_{j_3},\ \dots\right)$ onde $1 \leq j_1 < j_2 < j_3 < \cdots$ são números inteiros.

Exemplos:

$(1,3,5,7,\dots)$ é uma subsequência de $(1,2,3,4,5,6,7,\dots)$;

$(-1,-1,-1,\dots)$ é uma subsequência de $(1,-1,1,-1,\dots)$;

$(-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ \dots)$ é uma subsequência de $\left(-\sqrt{1},\ \sqrt{2},\ -\sqrt{3},\ \sqrt{4},\ -\sqrt{5},\ \dots\right)$,

Mas $(6,4,2,8,10,12,14,16,18,20,\dots)$ não é subsequência de $(1,2,3,4,5,6,\dots)$

Nem $\left(\sqrt{6},\ \sqrt{6},\ \sqrt{6},\ \dots\right)$ é subsequência de $\left(\sqrt{2},\ \sqrt{4},\ \sqrt{6},\ \sqrt{8},\ \sqrt{10},\ \sqrt{12},\ \dots\right)$.

Teorema 1: Seja $\{a_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência convergente de números reais e seja $L = \lim a_n$. Seja $\left\{a_{n_j}\right\}_{j\geq 1}$ uma subsequência de $\{a_n\}_{n\geq 1}$. Então $\lim a_{n_j} = L$.

Prova: Indutivamente obtemos $n_j \geq j$, além disso, dado $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ tal que para todo $j \geq N(\epsilon)$ temos $\left|a_j - L\right| < \epsilon$, e assim, $\left|a_{n_j} - L\right| < \epsilon$, como queríamos.

Definição: Dizemos que uma sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é *limitada superiormente* se existe um número real M tal que $a_n < M$ para todo inteiro positivo n . De maneira análoga, dizemos que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é *limitada inferiormente* se existe um número real m tal que $a_n > m$ para todo inteiro positivo n .

Se uma sequência dor simultaneamente limitada superiormente e inferiormente dizemos simplesmente que ela é *limitada*. Note que isso implica a existência de um número real T tal que $|a_n| < T$ para todo inteiro positivo n , pois basta tomar $T = \max\{|m|, |M|\}$.

Exemplos:

A sequência $(-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\dots)$ é limitada inferiormente, mas não é limitada, uma vez que não é limitada superiormente.

A sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ definida por $a_n = -n$ se n é par e $a_n = \frac{1}{n^2}$ se n é ímpar é limitada superiormente, mas não é limitada.

A sequência $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n\geq 1}$ é limitada.

Bem, tais M e m da definição acima são chamados *cota superior* e *cota inferior*, respectivamente. Ora, mas é claro que se M é uma cota superior, $M+1$ também é, e se m é uma cota inferior, $m-1$ também é. E aí vamos para mais uma definição!

Definição (o supremo e o ínfimo): Se $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência limitada superiormente, chamamos de $\sup\{a_n\}$ a menor das cotas superiores. Analogamente, se é limitada inferiormente, chamamos de $\inf\{a_n\}$ a maior das cotas inferiores.

Teorema 2: Se $\{a_n\}_{n\geq 1}$é uma sequência limitada superiormente, então existe um inteiro positivo n_0 tal que $a_{n_0} = \sup\{a_n\}$ ou ela admite uma subsequência $\left\{a_{n_j}\right\}_{j\geq 1}$ convergente com $\lim a_{n_j} = \sup\{a_n\}$.

Interessante, não? Vejamos a prova disso.

Prova: Suponha que $a_n < \sup\{a_n\}$ para todo inteiro positivo n e seja $M = \sup\{a_n\}$. Tome $n_1 = 1$ e indutivamente, dado n_j, escolha $n_{j+1} > n_j$ como o menor inteiro k tal que $a_k \geq a_{n_j}$.

Por que tal k existe? Ora, se tal k não existisse, então $a_w < a_{n_j}$ para todo $w > n_j$, e assim, $\sup\{a_n\} = \max\left\{a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_{n_j}\right\} < M$, uma contradição. Assim, construímos uma subsequência crescente $\left\{a_{n_j}\right\}_{j\geq 1}$.

Observe que, indutivamente, $a_{n_j} = \max\left\{a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_{n_j}\right\}$.

Logo, como M é a menor das cotas superiores, sempre vão existir termos da sequência suficientemente próximos de M , isto é, dado $\epsilon > 0$, existe ñ tal que $M - \epsilon < a_{ñ} < M$. Assim tomando $n_j >$ ñ obtemos $M - \epsilon < a_{ñ} \leq a_{n_j} < M$, isto é, $\left|a_{n_j - M}\right| < \epsilon$ para todo j a partir de um ponto. Portanto $\lim a_{n_j} = M$, como queríamos.

Teorema 2': Se $\{a_n\}_{n\geq 1}$é uma sequência limitada inferiormente, então existe um inteiro positivo n_0 tal que $a_{n_0} = \inf\{a_n\}$ ou ela admite uma subsequência $\left\{a_{n_j}\right\}_{j\geq 1}$ convergente com $\lim a_{n_j} = \inf\{a_n\}$.

Prova: Aplique o teorema anterior na sequência $\{-a_n\}_{n\geq 1}$.

Corolário: Seja $\{a_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência crescente (ou decrescente) e limitada, então tal sequência converge.

Prova: Seja $M = \sup\{a_n\}$ caso seja crescente (no outro caso tome o ínfimo). Se existe n_0 com $a_{n_0} = M$ então $a_n = M$ para todo $n \geq n_0$ e assim $\lim a_n = M$. Se não, a subsequência que construímos na prova do teorema passado é exatamente a sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$.

Além disso, temos um outro teorema nessa vibe:

Teorema de Bolzano-Weierstrass: Seja $\{a_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência limitada. Então tal sequência possui uma subsequência convergente.

Prova: A ideia é bem fofinha! Seja $M_k = \sup\{a_n\}_{n\geq k}$. Se existe algum k tal que $a_n < M_k$ para todo $n \geq k$, então pelo teorema 2 , $\{a_n\}_{n\geq k}$ admite subsequência convergente.

Suponha agora que para todo $k \geq 1$ existe $n_k \geq k$ tal que $a_{n_k} = M_k$.

Bem, como $\{M_k\}_{k\geq 1}$ é decrescente e limitada, ela é convergente, pelo corolário acima. Seja $L = \lim M_k$.

Considere veja que se existe uma sequência $\left\{M_{k_j}\right\}_{j\geq 1}$ tal que $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ e $n_{k_1} < n_{k_2} < n_{k_3} < \cdots$ então tal sequência é subsequência de $\{M_k\}$ o que nos garante que ela é convergente, e é uma subsequência de $\{a_n\}$ pois $\left\{M_{k_j}\right\} = \left\{a_{n_{k_j}}\right\}$.

Mas isso é fácil. Construa indutivamente! $k_1 = 1$ e dados $k_1 < k_2 < \cdots < k_j$ tome $k_{j+1} > \max\left\{k_j, n_{k_j}\right\}$ pois assim $n_{k_{j+1}} \geq k_{j+1} > n_{k_j}$

Definição: Dizemos que uma sequência $\{x_n\}$ é uma *sequência de Cauchy* quando para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ tal que para todo $m,\ n \geq N(\epsilon)$ temos $|x_m - x_n| < \epsilon$.

É claro que toda sequência convergente é de Cauchy, pois sendo $L = \lim x_n$, então dado $\epsilon > 0$ existe $N\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ satisfazendo $n \geq N\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \to |x_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$. Daí, para $m, n \geq N\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \to |x_m - x_n| \leq |x_m - L| + |L - x_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

Por outro lado, mostremos que toda sequência real de Cauchy é convergente.

Teorema 3: Toda sequência real de Cauchy é convergente.

Prova: Tomando $\epsilon = 1$ obtemos que existe t tal que para todo $m, n \geq t$ temos que $|x_m - x_n| < 1$, em particular, $x_t - 1 < x_n < x_t + 1$ para todo $n \geq t$ o que nos dá $\{x_n\}_{n\geq t}$ é limitado e portanto possui uma subsequência convergente pelo teorema de Bolzano-Weierstrass. Seja $\{x_{h_i}\}_{i\geq 1}$ tal subsequência convergente, com $h_1 < h_2 < h_3 < \cdots$. Seja $L = \lim x_{h_i}$. Bem, sabemos que dado $\epsilon > 0$ existe $N\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ tal que para $i \geq N\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \to \left|x_{h_i} - L\right| < \frac{\epsilon}{2}$, além disso, existe $M\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ tal que $m, n \geq M\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \to |x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$. Finalmente, tomando $n \geq M\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$obtemos:

Escolha i tal que $i \geq N\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$, $h_i \geq M\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ e assim: $|x_n - L| \leq |x_n - x_{h_i}| + |x_{h_i} - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, o que nos dá $\lim x_n = L$.

Observação ao aluno curioso: Ué, nos parece meio desnecessário nomear *sequência de Cauchy* e *sequência convergente* os mesmos tipos de sequência, né? Bem, vamos esclarecer um pouco isso...

Esse teorema não vale para todos os conjuntos munidos de uma *métrica*. Por exemplo, imagine o conjunto dos números racionais. Agora tome uma sequência de racionais que converge para $\sqrt{2}$ nos reais, por exemplo considerando a representação decimal de $\sqrt{2} = 1{,}4142135623731$ ... e construa a sequência $x_1 = 1{,}4$; $x_2 = 1{,}41$; $x_3 = 1{,}414$; $x_4 = 1{,}4142$; $x_5 = 1{,}41421$; ... então temos que $|x_n - \sqrt{2}| < 10^{-n}$ e em particular, $\{x_n\}_{n\geq 1}$ é de Cauchy tanto nos reais quanto nos racionais. Entretanto, $\{x_n\}_{n\geq 1}$ não converge nos racionais, apesar de ser de Cauchy.

Dizemos que um conjunto munido de uma métrica é *completo* se toda sequência de Cauchy converge.

Veja que $\mathbb{R}$ é completo, mas $\mathbb{Q}$ não é.

Definição (Limites infinitos): Dizemos que uma sequência $\{t_n\}_{n\geq 1}$ satisfaz $\lim t_n = \infty$ quando para todo número real M temos que $t_n > M$ para todo $n \geq N(M)$, sendo $N(M)$ um inteiro.

Analogamente, dizemos que $\lim t_n = -\infty$ quando para todo número real m temos que $t_n < m$ para todo $n \geq N(m)$, sendo $N(m)$ um inteiro.

Exemplos: $lim - n = -\infty$ e $\lim 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \infty$, apesar de ambas as sequências serem divergentes. Enquanto que a sequência divergente $\{(-1)^n n\}_{n\geq 0}$ NÃO satisfaz $\lim (-1)^n\, n = \infty$ NEM $\lim (-1)^n\, n = -\infty$.

Exercícios

1. Sejam $\{x_n\}_{n\geq 1}$ e $\{y_n\}_{n\geq 1}$ sequências convergentes com $a = \lim x_n$ e $b = \lim y_n$.
   (a) Seja k um número real. Prove que $\lim k + x_n = k + a$ e $\lim k\, x_n = ka$.
   (b) Prove que $\lim x_n + y_n = a + b$.
   (c) Prove que $\lim x_n\, y_n = ab$.
   (d) Se $b \neq 0$, prove que $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

2. Demonstre as afirmações abaixo:
   (a) Se $\lim x_n = \infty$ e $\{y_n\}$ é limitada inferiormente, então $\lim(x_n + y_n) = \infty$.
   (b) Se $\lim x_n = \infty$ e existe $c > 0$ tal que $y_n > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim(x_n y_n) = \infty$
   (c) Se $x_n > c > 0$ e $y_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim y_n = 0$ então $\lim \frac{x_n}{y_n} = \infty$.
   (d) Se $\{x_n\}$ é limitada e $\lim y_n = \infty$ então $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$.

3. Dadas as sequências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, defina $\{z_n\}$ pondo $z_{2n-1} = x_n$ e $z_{2n} = y_n$. Suponha que $\lim x_n = \lim y_n = a$, prove que $\lim z_n = a$.

4. Um número real a é chamado *valor de aderência* da sequência $\{x_n\}$ quando $\{x_n\}$ admite uma subsequência convergente cujo limite é a .

(a) É claro pelo teorema 1 que se uma sequência é convergente ela possui um único valor de aderência. É verdade que se uma sequência possui um único valor de aderência ela é convergente?

(b) Existe uma sequência $\{y_n\}$ cujo conjunto dos valores de aderência é $\mathbb{N}$?

(c) Existe uma sequência $\{z_n\}$ cujo conjuntos dos valores de aderência seja $[0,1]$?

5. Sejam a e b reais positivos, defina indutivamente as sequências $\{x_n\}_{n\geq 1}$, $\{y_n\}_{n\geq 1}$ pondo $x_1 = \sqrt{ab}$, $y_1 = \frac{a+b}{2}$, e para $n \geq 1 : x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$. Prove que $\{x_n\}_{n\geq 1}$, $\{y_n\}_{n\geq 1}$ convergem e $\lim x_n = \lim y_n$.

6. Resolva os itens abaixo:

(a) **(Teorema do confronto)** Sejam $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$três sequências com $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tais que $\lim x_n = \lim z_n = L$, então existe $\lim y_n$ e $\lim y_n = L$.

(b) Sejam $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ três sequências com $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tais que $\lim x_n < \lim z_n$, é necessariamente verdade que $\lim y_n$ existe?

7. Seja $a > 0$ e $\{x_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência definida por $x_1 = \sqrt{a}$ e para $n \geq 1$, $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$. $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge? Se sim, qual seu limite?

8. Seja $\{F_n\}_{n\geq 1}$ a sequência de Fibonacci dada por $F_1 = F_2 = 1$ e para $n \geq 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Existe $\lim \frac{F_n}{F_{n+1}}$? Se sim, calcule-o.

9. Seja$\{t_n\}_{n\geq 1}$ dada por $t_1 = 1$ e para $n \geq 1$, $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{n+1}$. $\{t_n\}$ converge? Se sim, calcule o limite.

10. Prove que $\lim \sqrt[n]{n!} = \infty$.

11. Se $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$ e $\{t_n\}$ uma sequência de reais positivos tais que $\lim t_1 + t_2 + \cdots + t_n = +\infty$. Prove que $\lim \frac{t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n}{t_1 + t_2 + \cdots + t_n} = a$

12. (IMC) Considere a seguinte sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,1,2,3,4,5,1,\dots)$. Encontre todos os pares (α, β) de reais positivos tais que

$$\lim \quad \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n^\alpha} = \beta$$

13. (OBM 2021) Um conjunto X de números reais é *limitado* quando existe real M tal que $|x| < M$ para todo $x \in X$. Um conjunto A é dito *enquadrado* quando é limitado e, para todos $a, b \in A$, não necessariamente distintos, $(a-b)^2 \in A$. Qual é o menor número real que pertence a algum conjunto enquadrado?

14. (OBM 2021) Seja $\alpha \geq 1$ um número real. Considere o conjunto $A(\alpha) = \{\lfloor n\alpha \rfloor : n \in \mathbb{N}\} = \{\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \dots\}$. Suponha que todos os inteiros positivos que **não pertencem** ao conjunto $A(\alpha)$ são exatamente os inteiros positivos que deixam um determinado resto r na divisão por 2021, com $0 \leq r < 2021$. Determine todos os possíveis valores de α.

15. (Vietnã) Prove que existem infinitos inteiros positivos que **não** são da forma $x_1^3 + x_2^5 + x_3^7 + x_4^9 + x_5^{11} + x_6^{13}$ onde $x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

16. Considere a sequência de reais $a_1,\ a_2,\ \dots$ tal que $a_1 = 1$ e $a_n = a_{n+1} + a_{n+2}$ para todo $n > 0$.

(a) Prove que existem constantes $\alpha,\ \beta,\ r,\ s\ \in \mathbb{R}$ tais que $a_n = r\alpha^{n-1} + s\beta^{n-1}$. Determine α e β.

(b) Suponha que $a_n > 0$ para todo inteiro $n > 0$. Prove que $r = 0$ ou $s = 0$.

(c) Nas condições do item (b), prove que o dígito das unidades de $\left\lfloor \frac{1}{a_i} \right\rfloor$ não pode ser $0,\ 3,\ 5$ ou 8 para todo $i > 0$.

Referência

Análise Real vol.1 Coleção Matemática Universitária, Elon Lages Lima.