1. (Polônia) Seja ABC um triângulo isósceles com base BC. Seja P um ponto no interior do triângulo ABC tal que $\angle CBP = \angle ACP$ e seja M o ponto médio de BC. Prove que $\angle BPM + \angle CPA = 180°$

2. Seja $\alpha = \dfrac{2\Delta}{a^2 + b^2 + c^2}$, em que Δ representa a área do triângulo ABC. Prove que as distâncias KL, KM e KN aos lados do triângulo do ponto simediano K são αa, αb e αc.

3. Prove o ponto P no interior do triângulo que minimiza a soma dos quadrados das distâncias aos lados, $S = x^2 + y^2 + z^2$, é o ponto simediano K.

4. Prove que o ponto simediano K divide a simediana AP do triângulo ABC na razão
$$\frac{AK}{KP} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}.$$

5. Perpendiculares traçadas desde B e C interceptam a bissetriz do ângulo A nos pontos P e Q, respectivamente. Uma reta traçada a partir de P, paralela ao lado AB, intercepta uma outra reta traçada a partir de P, paralela ao lado AC, no ponto R. Prove que AR é uma simediana do triângulo ABC.

6. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com AD paralelo a BC, $\angle A = \angle B = 90°$ e tal que $\angle CMD = 90°$, com M o ponto médio de AB. Seja K o pé da perpendicular a CD por M, P o ponto de intersecção de AK com BD e Q o ponto de intersecção de BK com AC. Prove que o ângulo $\angle AKB$ é reto e que
$$\frac{KP}{PA} + \frac{KQ}{QB} = 1.$$

7. Seja MN uma reta paralela ao lado BC de um triângulo ABC, com M em AB e N em AC. As retas BN e CM se interceptam em P. As circunferências circunscritas dos triângulos BMP e CNP se interceptam novamente em Q. Prove que AQ é uma simediana do triângulo ABC.