25ª Semana Olímpica – Recife – Julho de 2022
O Princípio das Gavetas de Dirichlet – Nível 2

Rogério Ricardo Steffenon

UNISINOS – Universidade do Vale do Rio dos Sinos

E-mail: steffenonenator@gmail.com

Resumo

O Princípio das Gavetas de Dirichlet – PGD

Se $n + 1$ objetos são colocados em n gavetas, então pelo menos uma gaveta conterá dois ou mais objetos.

Demonstração. Se nenhuma gaveta tivesse dois ou mais objetos, então cada gaveta teria no máximo um objeto. Isso implicaria que ao todo seriam no máximo n objetos, o que contradiria o enunciado. $\square$

Observação: Esse princípio também é chamado de *Princípio da Casa dos Pombos* e diz que se $n + 1$ pombos habitam n casas, então pelo menos dois pombos habitam alguma das casas.

Em vários problemas em que é aplicado o PGD estará presente uma ideia bastante comum em Matemática: a existência. É muito frequente provarmos que determinado objeto matemático (número, ponto ou função) existe sem que saibamos exibi-lo concretamente. O problema a seguir retrata essa questão, onde mostramos a existência de uma situação sem explicitar os elementos envolvidos.

Exemplo: No Brasil há pelo menos duzentas mulheres com a mesma quantidade de fios de cabelo na cabeça.

Prova: Observações científicas mostram que uma pessoa tem, no máximo, 500 mil fios de cabelo na cabeça. Consideremos as gavetas $0, 1, 2, \ldots, 500000$. Como no Brasil tem mais de 100 milhões de mulheres, basta ver que se no máximo 199 mulheres tivessem a mesma quantidade de fios de cabelo (199 mulheres associadas a cada gaveta), então deveriam existir no máximo $199 \times 500001 = 99.500.199$ mulheres no Brasil. Como existem mais, então o resultado fica demonstrado. $\square$

Proposição: Se colocarmos k objetos em m gavetas ($k > m$), então em pelo menos uma gaveta haverá ao menos

$$\left\lfloor \frac{k-1}{m} \right\rfloor + 1 \text{ objetos.}$$

Demonstração. Se cada gaveta tivesse no máximo $\left\lfloor \frac{k-1}{m} \right\rfloor$ objetos, então seriam no máximo

$$m \cdot \left\lfloor \frac{k-1}{m} \right\rfloor \leqslant m \cdot \frac{k-1}{m} = k - 1 < m$$

objetos ao todo, o que dá uma contradição. $\square$

Problema 1.

(a) Mostre que $(a-b)(a-c)(b-c)$ é par, para quaisquer a, b e c inteiros.

(b) Se $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são inteiros, mostre que o produto $\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i)$ é divisível por $n!$.

Problema 2. Os pontos de uma reta são coloridos com 12 cores. Prove que existem dois pontos com a mesma cor tal que a distância entre eles é um número inteiro.

Problema 3. Os números naturais de 1 a 10 estão divididos em três grupos. Mostre que o produto dos números de um dos grupos tem que ser maior que 153.

Problema 4. Sabendo que 21 alunos colheram 200 laranjas, prove que pelo menos dois deles colheram a mesma quantidade de laranjas.

Problema 5. Se escolhermos mais do que n números do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, então um deles será múltiplo do outro.

Problema 6.

(a) Se escolhermos mais do que n números do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, então dois desses números são primos entre si.

(b) Prove que se escolhermos $n+1$ números distintos no conjunto $\{1, \ldots, 2n-1\}$, então existem pelo menos dois deles cuja soma é igual a $2n$.

Problema 7. Guilherme teve os olhos vendados e com uma caneta fez 50 pontos numa folha quadrada com 70 cm de lado. Mostre que existem dois pontos cuja distância é inferior a 15 cm.

Problema 8.

(a) Seja $a \neq 0$ um algarismo no sistema decimal. Todo número natural n tem um múltiplo escrito apenas com 0s e a.

(b) **OBM 2008** Vamos chamar de *garboso* o número que possui um múltiplo cujas quatro primeiras casas de sua representação decimal são 2008. Por exemplo, 7 é garboso, pois 200858 é múltiplo de 7 e começa com 2008. Observe que $200858 = 28694 \times 7$. Mostre que todos os inteiros positivos são garbosos.

(c) Sejam $A = \{n \in \mathbb{N} : \mathrm{mdc}(n, 10) = 1\}$, $b = a_1a_2\ldots a_k$ um número com k algarismos e se $n \in \mathbb{N}$, $M(n)$ é o conjunto dos múltiplos de n. Agora considere o conjunto $B = \{b, bb, bbb, bbbb, \ldots\}$, onde $bb\ldots b$ é a justaposição dos blocos $b = a_1a_2\ldots a_k$.

Se $n \in A$, prove que $M(n) \cap B$ é infinito.

Problema 9 – OBM 2012. Quantos elementos tem o maior subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 25\}$ que não contêm dois números distintos cujo produto é um quadrado perfeito?

Problema 10. Numa festa com n pessoas há pelo menos duas que têm o mesmo número de conhecidos na festa. Suponha que a relação de conhecer seja simétrica.

Problema 11.

a) Mostre que entre nove números que não possuem divisores maiores que cinco, existem dois cujo produto é um quadrado.

b) **(IMO 1985)** Dado um conjunto M com 1985 inteiros positivos distintos, nenhum dos quais tem divisores primos maiores do que 23, mostre que há 4 elementos em M cujo produto é uma quarta potência. Tente resolver o problema trocando 1985 por 1537.

Problema 12 – IMO 2001. Sejam $n_1, n_2, ..., n_m$ inteiros com m ímpar.

Denotemos $x = (x_1, \ldots, x_m)$ uma permutação dos inteiros $1, 2, ..., m$, e definamos a função $f(x) = x_1n_1 + \cdots + x_mn_m$.

Demonstre que existem duas permutações a e b tais que $f(a) - f(b)$ é divisível por $m!$.

Problema 13. Os pontos de um plano são pintados usando três cores. Prove que existe um triângulo isósceles monocromático (os vértices têm a mesma cor).

Problema 14. O plano é pintado usando duas cores. Prove que existem dois pontos de mesma cor distando exatamente um metro.

Problema 15. O plano é totalmente pintado usando duas cores. Prove que existe um retângulo cujos vértices são todos da mesma cor.

https://usamts.org/Solutions/Solution4_1_18.pdf

Problema 16. O plano é pintado usando três cores. Prove que existem dois pontos de mesma cor distando exatamente um metro.

Problema 17. Mostre que um triângulo equilátero não pode ser totalmente coberto por outros dois triângulos equiláteros menores.

Problema 18. Dados 37 pontos no espaço com coordenadas inteiras de modo que entre eles não haja três colineares. Prove que pelo menos um dos triângulos formados por três desses pontos possui o baricentro com coordenadas inteiras.

Observação O problema acima continua válido se trocarmos 37 por 19, mas nesse caso a prova fica bem mais difícil, pois é necessário estudar vários casos.

Problema 19. Prove que existem 1000 números consecutivos entre os quais há, exatamente, 20 números primos.

Problema 20 – IMO. Mostre que existem infinitos múltiplos de 1991 da forma $19999\ldots99991$.

Problema 21. O plano é totalmente pintado de três cores. Mostre que existe um triângulo retângulo cujos vértices são todos da mesma cor.

Problema 22. Em um torneio de xadrez há $2n+3$ participantes. Cada par de participantes joga exatamente uma partida entre si. Os jogos são arranjados de modo que não haja dois jogos simultâneos, e cada participante, após jogar uma partida, fica livre durante as próximas n partidas. Prove que um dos participantes que jogou na primeira partida também vai jogar a última partida.

Problema 23. Nove vértices de um icoságono (polígono de vinte lados) regular são pintados da mesma cor. Prove que podemos encontrar três deles formando um triângulo isósceles.

Problema 24. Cada ponto do perímetro de um triângulo equilátero é pintado de uma de duas cores. Mostre que é possível escolher três pontos da mesma cor formando um triângulo retângulo.

Problema 25. O plano é pintado usando três cores. Prove que podemos encontrar um triângulo retângulo isósceles com os três vértices da mesma cor.

Problema 26. Cada ponto do plano é pintado de uma de três cores, sendo cada cor usada pelo menos uma vez. Prove que podemos encontrar um triângulo retângulo cujos vértices são de cores distintas.

Problema 27. Cada ponto do plano de coordenadas inteiras é pintado de uma de três cores, sendo cada cor usada pelo menos uma vez. Prove que podemos encontrar um triângulo retângulo cujos vértices são de cores distintas.

Problema 28. Em um grupo de 29 *hobbits* existem alguns deles que falam a verdade e os outros que sempre mentem. Em um certo dia de primavera, todos eles sentaram-se ao redor de uma mesa, e cada um deles falou que seus dois vizinhos eram mentirosos.

(a) Prove que pelo menos 10 *hobbits* falavam a verdade.

(b) É possível que exatamente 10 deles falem a verdade?

Problema 1.

(a) Mostre que $(a-b)(a-c)(b-c)$ é par, para quaisquer a, b e c inteiros.

(b) Se $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são inteiros, mostre que o produto $\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$ é divisível por $n!$

(c) Se $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são inteiros, mostre que o produto $\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$ é divisível por $\prod_{k=2}^{n} k!$

(a) Dados três números inteiros a, b e c (esses são os objetos!), temos, pelo PGD, que pelo menos dois deles têm a mesma paridade. A diferença desses dois números é par, e, assim, $(a-b)(a-c)(b-c)$ também é par.

(b) Vamos provar o resultado por indução em n.

Para $n = 1$ é claramente verdade e o caso $n = 2$ corresponde ao item (a).

Supõe que o resultado vale para $k \geqslant 2$: se $a_0, a_1, \ldots, a_k$ são inteiros, então $\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant k} (a_j - a_i)$ é divisível por $k!$

Consideremos o conjunto com $k+2$ inteiros $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$.

Pelo PGD segue que existem $0 \leqslant r < s \leqslant k+1$ tais que a_r e a_s que têm o mesmo resto na divisão por $k+1$.

Logo $a_s - a_r$ é divisível por $k+1$.

Agora consideremos o conjunto $A - \{a_s\}$ que tem k números inteiros e pela hipótese de indução temos que $\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant k, i \neq s, j \neq s} (a_j - a_i)$ é divisível por $k!$.

Logo $\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant k, i \neq s, j \neq s} (a_j - a_i) \cdot (a_s - a_r)$ é divisível por $(k+1)!$ e $\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant k+1} (a_j - a_i)$ é divisível por $(k+1)!$ $\square$

Problema 2. Os pontos de uma reta são coloridos com 12 cores. Prove que existem dois pontos com a mesma cor tal que a distância entre eles é um número inteiro.

Considere 13 pontos com coordenadas inteiras. Assim segue, pelo PGD, que pelo menos dois deles têm a mesma cor, e a distância entre eles é inteira. $\square$

Problema 3. Os números naturais de 1 a 10 estão divididos em três grupos. Mostre que o produto dos números de um dos grupos tem que ser maior que 153.

O produto dos dez números é igual a $10! = 3628800$. Se o produto dos números de cada grupo não fosse maior que 153, então o produto deles seria no máximo igual a $153^3 = 3581577$. $\square$

Problema 4. Sabendo que 21 alunos colheram 200 laranjas, prove que pelo menos dois deles colheram a mesma quantidade de laranjas.

Suponha que todos os alunos colheram quantidades diferentes de laranjas. Então, foram colhidas pelo menos $0 + 1 + \cdots + 20 = 210$ laranjas, mas isso dá uma contradição. $\square$

Problema 5. Se escolhermos mais do que n números do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, então um deles será múltiplo do outro.

Dado m um inteiro positivo, vimos como consequência do TFA que ele pode ser escrito de modo único na forma $m = 2^k b$, onde $k \geqslant 0$ e b é ímpar. Denominamos b a sua parte ímpar. No conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ só podem existir n possíveis partes ímpares diferentes: $1, 3, \ldots, 2n-1$. Se escolhermos mais do que n números de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ segue, pelo PGD, que existem dois desses números, r e s, que têm a mesma parte ímpar, ou seja, $r = 2^k b$ e $s = 2^t b$. O maior desses números será múltiplo do menor. $\square$

Problema 6.

(a) Se escolhermos mais do que n números do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, então dois deles são primos entre si.

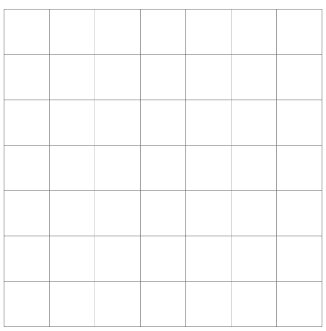
(b) Prove que se escolhermos $n+1$ números distintos no conjunto $\{1, \ldots, 2n-1\}$, então existem pelo menos dois deles cuja soma é igual a $2n$.

(a) Primeiro considere os n pares de números: 1 e $2, 3$ e $4, \ldots, 2n-1$ e $2n$. Como são escolhidos mais do que n números, pelo PGD, há pelo menos dois pertencentes ao mesmo par. Como dois números do mesmo par são consecutivos, eles são primos entre si.

(b) Considere a lista de n conjuntos: $\{1, 2n-1\}, \{2, 2n-2\}, \ldots, \{n-1, n+1\}, \{n\}$. Note que a soma dos elementos de cada um dos conjuntos, exceto o último, é igual a $2n$. Se escolhermos $n+1$ números distintos entre 1 e $2n-1$, pelo menos dois deles pertencerão ao mesmo conjunto e assim está provado o resultado.

Problema 7. Guilherme teve os olhos vendados e com uma caneta fez 50 pontos numa cartolina quadrada com lado igual a 70 cm. Mostre que existem dois pontos cuja distância é inferior a 15 cm.

Divida a cartolina em num reticulado com 49 quadrados de lado 10 cm cada, conforme figura abaixo.



Pelo PGD há pelo menos dois pontos, digamos A e B, num mesmo quadrado. A distância máxima num quadrado de lado 10 cm é igual a diagonal que nesse caso mede $\sqrt{200}$. Como $\sqrt{200} < \sqrt{225} = 15$, segue o resultado. $\square$

Problema 8.

(a) Seja $a \neq 0$ um algarismo no sistema decimal. Todo número natural n tem um múltiplo escrito apenas com 0s e a.

(b) **OBM 2008** Vamos chamar de *garboso* o número que possui um múltiplo cujas quatro primeiras casas de sua representação decimal são 2008. Por exemplo, 7 é garboso, pois 200858 é múltiplo de 7 e começa com 2008. Observe que $200858 = 28694 \times 7$. Mostre que todos os inteiros positivos são garbosos.

(c) Sejam $A = \{n \in \mathbb{N} : \text{mdc}(n, 10) = 1\}, b = a_1a_2 \dots a_k$ um número com k algarismos e se $n \in \mathbb{N}$, $M(n)$ é o conjunto dos múltiplos de n. Agora considere o conjunto $B = \{b, bb, bbb, bbbb, \dots\}$, onde $bb \dots b$ é a justaposição dos blocos $b = a_1a_2 \dots a_k$.

Se $n \in A$, prove que $M(n) \cap B$ é infinito.

(a) Consideramos os $n+1$ números $a, aa, aaa, aaaa, \dots, \underbrace{aa \dots aa}_{n+1}$ (esses são os objetos!).

Sabemos que os possíveis restos na divisão por n são $0, 1, 2, \dots, n-1$ (essas são as gavetas!).

Pelo PGD, segue que pelo menos dois dos $n+1$ números acima devem ter o mesmo resto na divisão por n, digamos que $M = aa \dots aa$ (p algarismos) e $N = aa \dots aa$ (q algarismos), com $p > q$. então $M - N$ é um número formado apenas por ZEROS e a.

(b) Seja n um inteiro positivo e denotemos $b = 2008$. Agora considere os $n+1$ números inteiros $b, bb, \dots, \underbrace{b \dots b}_{n+1}$ (esses são os objetos!), onde $bb = 20082008$, e assim por diante.

Os restos possíveis por n são $0, 1, \dots, n-1$ (essas são as gavetas), e assim existem dois números, digamos $\underbrace{b \dots b}_{k}$ e $\underbrace{b \dots b}_{\ell}$, com $k < \ell$ que têm o mesmo resto na divisão por n e o número $\underbrace{b \dots b}_{\ell} - \underbrace{b \dots b}_{k}$ satisfaz a condição desejada.

(c) Sejam $n \in A$ e $b = a_1a_2 \dots a_k$. Considere os $n+1$ números $b, bb, \dots, \underbrace{b \dots b}_{n+1}$. Logo, dois desses números, digamos $\underbrace{b \dots b}_{k}$ e $\underbrace{b \dots b}_{\ell}$, com $k < \ell$, têm o mesmo resto na divisão por n, e, assim, o número $\underbrace{b \dots b}_{\ell} - \underbrace{b \dots b}_{k}$ é divisível por n.

Mas $\underbrace{b \dots b}_{\ell} - \underbrace{b \dots b}_{k} = \underbrace{b \dots b}_{\ell-k}\underbrace{0 \dots 0}_{k}$ e como n é primo com 10, segue que $b_1 = \underbrace{b \dots b}_{\ell-k}$ é um dos números que procuramos.

Agora considere os $n+1$ números $\underbrace{b \dots b}_{\ell-k+1}, \underbrace{b \dots b}_{2(\ell-k+1)}, \dots, \underbrace{b \dots b}_{(n+1)(\ell-k+1)}$.

Dois deles, digamos $\underbrace{b \dots b}_{i(\ell-k+1)}$ e $\underbrace{b \dots b}_{j(\ell-k+1)}$, com $1 \leqslant i < j \leqslant n+1$, têm mesmo resto divididos por n, logo $\underbrace{b \dots b}_{j(\ell-k+1)} - \underbrace{b \dots b}_{j(\ell-k+1)} = \underbrace{b \dots b}_{(j-i)(\ell-k+1)} \underbrace{0 \dots 0}_{i(\ell-k+1)}$ é divisível por n.

Seguindo o mesmo raciocínio acima, temos que $b_2 = \underbrace{b \dots b}_{(j-i)(\ell-k+1)}$ é um número procurado diferente de b_1.

Essa ideia pode ser replicada para encontrarmos infinitos números com a propriedade desejada. $\square$

Problema 9 – OBM 2012. Quantos elementos tem o maior subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 25\}$ que não contêm dois números distintos cujo produto é um quadrado perfeito?

Solução (site da OBM): Considere os conjuntos $\{1, 4, 9, 16, 25\}$, $\{2, 8, 18\}$, $\{3, 12\}$, $\{5, 20\}$ e $\{6, 24\}$. Diremos que um subconjunto satisfazendo as propriedades do enunciado é supimpa. Para que um subconjunto seja supimpa, ele só pode possuir no máximo um elemento de cada um dos conjuntos listados. Assim, um subconjunto supimpa possui no máximo $25 - 4 - 2 - 1 - 1 - 1 = 16$ elementos.

Um exemplo de um subconjunto supimpa com 16 elementos é $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23\}$.

Portanto, o número máximo de elementos de um subconjunto supimpa é de fato 16. $\square$

Problema 10. Numa festa com n pessoas há pelo menos duas que têm o mesmo número de conhecidos na festa. Suponha que a relação de conhecer seja simétrica.

Considere uam festa com n pessoas, para $n \geqslant 2$. Assim o número de conhecidos de cada uma dessas pessoas pode ser um dos seguintes: $0, 1, \ldots, n-1$. Se algum conhece $n-1$ pessoas, não é possível que exista alguém que não conhece ninguém. E vice-versa, se algum deles não conhece nenhum dos demais, não é possível que alguém conheça todos. Com isso temos n pessoas (objetos) para $n-1$ possibilidades (gavetas). $\square$

Problema 11. (a) Mostre que entre nove números que não possuem divisores maiores que cinco, existem dois cujo produto é um quadrado.

(b) **(IMO 1985)** Dado um conjunto M com 1985 inteiros positivos distintos, nenhum dos quais tem divisores primos maiores do que 23, mostre que há 4 elementos em M cujo produto é uma quarta potência. Tente resolver o problema trocando 1985 por 1537.

a) Cada um dos nove números é da forma $2^{e_1} \cdot 3^{e_2} \cdot 5^{e_3}$, onde e_i pode ser par ou ímpar. A tabela abaixo mostra as oito possibilidades para as paridades dos expoentes.

e_1	ímpar	ímpar	ímpar	par	ímpar	par	par	par
e_2	ímpar	ímpar	par	ímpar	par	ímpar	par	par
e_3	ímpar	par	ímpar	ímpar	par	par	ímpar	par

Como temos nove números (esses são os objetos) e oito possibilidades para os expoentes (essas são as gavetas), pelo PGD dois deles, digamos a e b, serão do mesmo tipo e o produto destes será um quadrado perfeito.

(b) Vamos provar o resultado supondo que M tem 1537 elementos. Se $x \in M$, então $x = 2^{e_1}3^{e_2}\cdots 19^{e_8}23^{e_9}$, onde e_i pode ser par ou ímpar. Como $2^9 = 512$ segue que, nesse caso, temos 512 possibilidades para as paridades dos expoentes (essas são as gavetas!). M tem 1537 elementos, então podemos encontrar $a_1, b_1 \in M$ tais que a_1b_1 é quadrado perfeito. Agora o conjunto $M - \{a_1, b_1\}$ tem 1535 elementos e novamente podemos encontrar $a_2, b_2 \in M$ tais que a_2b_2 é um quadrado perfeito. Esse processo pode ser repetido até encontrarmos os pares de elementos distintos de M $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_{512}, b_{512})$ tais que a_ib_i é um quadrado perfeito. Vamos supor que $a_ib_i = c_i^2$, com c_i inteiro. Nesse momento ainda teremos $1537 - 2 \times 512 = 513$ elementos de M que ainda não foram usados. Repetimos mais uma vez o processo e encontramos $a_{513}, b_{513} \in M$ tais que $a_{513}b_{513} = c_{513}^2$ é quadrado perfeito. Agora considere o conjunto $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_{513}\}$. Nesse conjunto temos 513 elementos cujos primos que aparecem na fatoração desses números são menores ou iguais a 23 e aplicando novamente o raciocínio acima existem $c_i, c_j \in C$ tais que $c_ic_j = d^2$ para algum inteiro d.

Finalmente note que $a_i, b_i, a_j, b_j \in M$ são tais que $a_ib_ia_jb_j = c_i^2c_j^2 = (c_ic_j)^2 = (d^2)^2 = d^4$. $\square$

Problema 12 – IMO 2001. Sejam $n_1, n_2, ..., n_m$ inteiros com m ímpar.

Denotemos $x = (x_1, \ldots, x_m)$ uma permutação dos inteiros $1, 2, ..., m$, e definamos a função $f(x) = x_1 n_1 + \cdots + x_m n_m$.

Demonstre que existem duas permutações a e b tais que $f(a) - f(b)$ é divisível por $m!$.

Dada uma permutação $x = (x_1, ..., x_m)$ de S_m, definimos a permutação complementar como sendo $z = (m + 1 - x_1, \ldots, m + 1 - x_m)$.

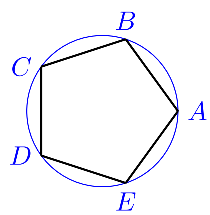
Por exemplo, em S_3 o complementar de (123) é (321), em S_5, a permutação complementar de (23154) é (43512). A gora consideremos a sequência y com m coordenadas iguais a $(m + 1)/2$.

Afirmação: Dada uma permutação x de S_m e sua complementar z, segue que $f(x) - f(y) = f(y) - f(z)$.

Agora consideremos $\{f(x) : x \in S_m\} \bigcup \{f(y)\}$. Assim temos um conjunto com $m!+1$ números. Pelo PGD segue que dois deles devem ter o mesmo resto na divisão por $m!$. Caso nenhum deles for y, acabou. Se um deles for y e algum x de S_m, posso tomar x e seu complementar z, pois $f(x) - f(z) = (f(x) - f(y)) + (f(y) - f(z)) = 2(f(x) - f(y))$.

Problema 13. Os pontos de um plano são pintados usando três cores. Prove que existe um triângulo isósceles monocromático (os vértices têm a mesma cor).

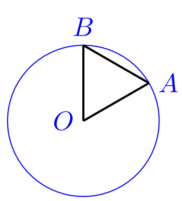
Suponha que exista uma forma de pintar o plano de forma que não exista um triângulo isósceles monocromático. Assuma que as cores sejam azul, preto e vermelho. Construa um suponha sem perda de generalidade que o seu centro O seja vermelho. Dessa forma, pode haver no máximo um único ponto vermelho dentre os pontos dos círculo. Assim é possível construir um pentágono regular $ABCDE$ cujos vértices são todos azuis ou pretos.



Pelo PGD, existirão três vértices do pentágono que são da mesma cor. E como quaisquer três vértices de um pentágono regular formam um triângulo isósceles, existirá um triângulo isósceles monocromático. □

Problema 14. O plano é pintado usando duas cores. Prove que existem dois pontos de mesma cor distando exatamente um metro.

Tome um ponto O do plano e trace um círculo com centro nesse ponto e de raio 1 metro. Em seguida, construa um triângulo equilátero tendo como pontos o centro e dois pontos A e B da circunferência.



Assim temos três pontos (objetos) que a distância entre dois quaisquer é 1 metro e, pelo PGD, dois deles deverão ter a mesma cor. □

Problema 15. O plano é totalmente pintado usando duas cores. Prove que existe um retângulo cujos vértices são todos da mesma cor.

Desenhe três retas horizontais, digamos r, s e t. Agora trace uma reta u que seja perpendicular a essas três. Assim temos três pontos de interseção de u com cada uma das demais. A tabela abaixo mostra as oito possíveis configurações colorações desses três pontos na vertical.

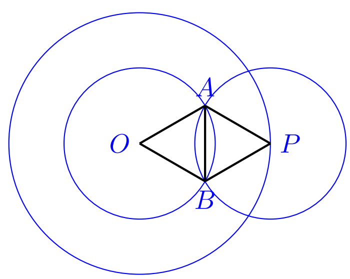
Tabela 1:

A	A	A	V	V	V	A	V
A	A	V	A	A	V	V	V
A	V	A	A	V	A	V	V

Se tivermos mais oitos retas verticais, além de u, é claro que haverá duas interseções com a mesma configuração e, portanto teremos um retângulo monocromático. □

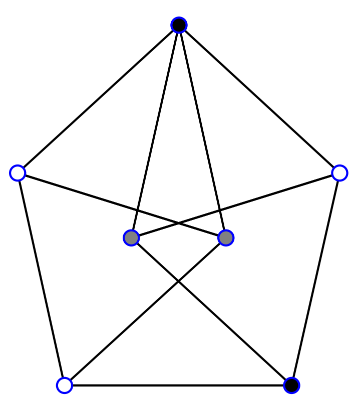
Problema 16. O plano é pintado usando três cores. Prove que existem dois pontos de mesma cor distando exatamente um metro.

Considere um ponto O, que podemos supor que seja branco. Trace a circunferência de raio $\sqrt{3}$ metros. Existem duas possibilidades: Todos os pontos do círculo são brancos ou há um ponto que é preto ou cinza. No primeiro caso, podemos encontrar dois pontos sobre o círculo que distam 1 metro, resolvendo, assim, o problema. Caso contrário, suponha que exista um ponto preto P na circunferência. Agora considere as circunferências de centros O e P com raio 1 metro. Elas se cortam em dois pontos, A e B, que formam dois triângulos equiláteros OAB e PAB de lado 1 metro.

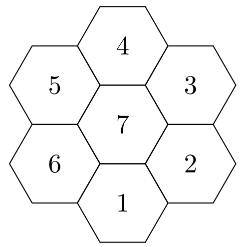


Se A ou B for branco, o segmento AO ou BO satisfaz a condição; se A ou B for preto, o segmento AP ou BP satisfaz a condição; se A e B forem cinzas, o segmento AB resolve o problema.

Outra solução utiliza o grafo de Moser indicado abaixo, cujas arestas medem 1 metro. Qualquer coloração dos vértices utilizando três cores terá dois vértices adjacentes com a mesma cor.



O resultado também já foi demonstrado para 4 cores, isto é, qualquer pintura do plano por 4 cores possui dois pontos de mesma cor distando 1 metro. A figura a seguir mostra um padrão de cobertura do plano em 7 cores, que impossibilita achar dois pontos de mesma cor distando 1 metro. O tamanho do lado do hexágono deve ser escolhido apropriadamente, como $\ell = 49$ centímetros. Isso impedirá dois pontos dentro do mesmo hexágono com distância de 1 metro.



Na teoria dos grafos geométricos, o problema Hadwiger-Nelson, em homenagem a Hugo Hadwiger e Edward Nelson, pede o número mínimo de cores necessárias para colorir o plano, de modo que não haja dois pontos na distância "1"do outro que tenham a mesma cor. A resposta a esse problema continua desconhecida até os dias atuais. Desde que o problema foi concebido, acredita-se que esse número mágico é alguma coisa entre 4 e 7, mas a resposta definitiva ainda é um mistério. Em 2018, Aubrey de Grey, um PhD. em Biologia e sem nenhuma ligação com matemática, estava brincando com esse problema no seu tempo livre, quando descobriu, e provou[3] uma pré-impressão argumentando que o número mínimo de cores é de pelo menos cinco e o menor grafo que ele descobriu tem 1581 vértices. Ou seja, ele reduziu a janela de 4 a 7 cores que se acreditava anteriormente para 5 a 7 cores. Esse foi o primeiro avanço na busca de uma solução para esse problema.

O biólogo do envelhecimento inglês Aubrey de Grey, formado em ciências da computação na Universidade de Cambridge, ficou famoso pelos estudos desenvolvidos para interromper o envelhecimento humano. Chamado de "o profeta da imortalidade", Grey é um dos mais conhecidos estudiosos do envelhecimento. Ele costuma dizer que poderá viver 1.000 anos.

Nas horas vagas, ataca de matemático amador. E foi numa dessas incursões em seu passatempo que ele encontrou a solução para um problema aberto há 60 anos — o Hadwiger-Nelson. A questão remonta a trabalhos do suíço Hugo Hadwiger e do americano Edward Nelson e foi publicada pela primeira vez em 1960 pelo divulgador científico Martin Gardner. Trata-se de descobrir o número mínimo de cores para colorir os pontos do plano de modo a garantir que dois pontos a distância 1 nunca sejam representados com a mesma cor.

O desafio despertou o interesse de matemáticos famosos, como o húngaro Paul Erdös. Embora os pesquisadores rapidamente tenham reduzido as possibilidades, descobrindo que o plano pode ser colorido por não menos que quatro e não mais do que sete cores, ninguém conseguiu mudar esses limites. Até Grey decidir matar o tempo e se debruçar sobre o assunto.

No dia 8 de abril, o pesquisador publicou a prova no site arxiv.org sob o título "O número cromático do plano é pelo menos 5". No artigo, ele demonstra que um grafo com 1.581 vértices requer pelo menos cinco cores diferentes — não quatro como se pensava anteriormente ser a resposta de menor alcance para o problema.

Em entrevista à revista norte-americana "Quanta Magazine", o pesquisador revela que encontrou o caminho para o número cromático do problema do plano brincando com um fuso de Moser , forma composta de sete vértices e 11 bordas.

Ao agregar números enormes dessas construções junto com outras formas, ele percebeu que um compósito de 20.425 vértices exigia mais de quatro cores: a primeira vez que a faixa de Hadwiger-Nelson foi reduzida em mais de 60 anos.

Embora incomum, não é inédito ver um matemático amador fazer progressos significativos em um problema aberto há tanto tempo. Na década de 1970, a dona de casa americana Marjorie Rice encontrou a resposta para um problema de tesselações (maneiras de revestir um plano com pentágonos) após se dedicar a um artigo do tema na "Scientific American".

https://impa.br/noticias/matematico-amador-resolve-questao-aberta-ha-60-anos/

Problema 17. Mostre que um triângulo equilátero não pode ser totalmente coberto por outros dois triângulos equiláteros menores.

Supõe que um triângulo T seja coberto por dois triângulos equiláteros R e S. Assim, todo ponto de T estará em R ou em S. Em particular, os três vértices de T devem estar distribuídos nos triângulos R e S e, pelo PGD, um deles, digamos R, deve conter pelo menos dois vértices de T. Mas assim R é pelo menos do mesmo tamanho de T, o que dá uma contradição. Assim é impossível cobrir um triângulo equilátero com dois equiláteros menores. □

Problema 18. Dados 37 pontos no espaço com coordenadas inteiras de modo que entre eles não haja três colineares. Prove que pelo menos um dos triângulos formados por três desses pontos possui o baricentro com coordenadas inteiras.

Lembre que se as coordenadas dos vértices de um triângulo são

$A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2)$ e $C = (x_3, y_3, z_3)$, então o baricentro é o ponto

$$P = \frac{A+B+C}{3} = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right) .$$

Pelo PGD existem pelo menos 13 pontos que têm a coordenada x com mesmo resto na divisão por 3. Desses, pelo PGD, há pelo menos 5 pontos que têm a coordenada y com o mesmo resto na divisão por 3. Dos cinco pontos finais, aplicando mais uma vez o PGD, existem pelo menos três deles tais que a coordenada z deles têm o mesmo resto na divisão por 3. Portanto, esses três pontos satisfazem a condição do problema. □

Observação O problema acima continua válido se trocarmos 37 por 19, mas nesse caso a prova fica bem mais difícil, pois é necessário estudar vários casos.

Problema 19. Prove que existem 1000 números consecutivos entre os quais há, exatamente, 20 números primos.

Entre 1 e 100 há 25 números primos:

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.$

Por outro lado os números $1001! + 2, 1001! + 3, \ldots, 1001! + 1001$ são 1000 números consecutivos todos compostos.

Começando com os números de 1 a 100 vamos acrescentando o seguinte e retirando o menor: primeiro troca 1 a 100 por 2 a 101, depois troca para 3 a 102, etc.

Temos intervalos 100 números consecutivos vai aumentando ou diminuindo de no máximo uma unidade a cada passo. Assim, como era 25 inicialmente, pode ser igual a 0 e aumenta ou diminui de 1 em 1, em algum momento será igual a 20. □

Problema 20 – IMO. Mostre que existem infinitos múltiplos de 1991 da forma $19999\ldots99991$.

1991 é claramente um desses números. Considere todos os infinitos números da forma 199...91, com mais de três noves. Como há infinitos números (esses são os objetos) e o resto da divisão de qualquer número inteiro por 1991 é um dos números $0, 1, 2, \ldots, 1990$ (essas são as gavetas), então dois números deixam o mesmo resto. Se subtrairmos esses números obtemos um número múltiplo de 1991 (os restos se cancelam). Assim, existem k e ℓ tais que $1\underbrace{99...9}_{k}1 - 1\underbrace{99...9}_{\ell}1 = 199...9800...0$ é múltiplo de 1991.

Podemos cortar os zeros à direita e o número continua múltiplo de 1991, mas mantemos três deles: 199...98000 é múltiplo de 1991. Somando 1991 obtemos $199...98000 + 1991 = 199...99991$ que é múltiplo de 1991. É fácil ver que esse número tem pelo menos três noves. Supõe que esse número tem m noves.

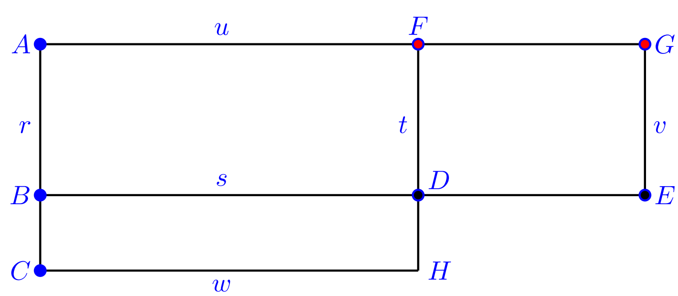
Agora considere os infinitos números da forma 199...91, com mais de $t + 1$ noves. Seguindo a mesma estratégia acima encontramos um múltiplo de 1991 com pelo menos $t + 1$ noves . Esse raciocínio pode ser continuado para a obtenção do resultado. □

Problema 21. O plano é totalmente pintado de três cores. Mostre que existe um triângulo retângulo cujos vértices são todos da mesma cor.

Como uma reta tem infinitos pontos, é claro que toda reta vertical tem pelo menos três pontos da mesma cor. Vamos supor que os pontos A, B e C estão numa reta vertical r e que são pontos de cor azul. Agora traçamos a reta s perpendicular a r passando por B. Se a reta s tiver um ponto X diferente de B que seja azul, temos um triângulo retângulo azul ABX, por exemplo.

Caso contrário, supõe que B é o único ponto de cor azul de s. Então podemos supor que s tem dois pontos, denominados D e E, de cor preta. Tracemos a reta t perpendicular a s passando por D e a reta u perpendicular a r passando por A. Denominamos o ponto de interseção de t e u como sendo F. Se F tiver cor azul, o triângulo retângulo ABF será azul. Se F for um ponto preto, o triângulo retângulo FDE será preto.

A outra hipótese é F ser um ponto vermelho. Nesse caso traçamos a reta v perpendicular a s passando por E e seja G o ponto de interseção das retas u e v. Se G for azul ou preto, acabou! Se G for vermelho, trace a reta w perpendicular a r que passa por C. Seja H o ponto de interseção de t e w. Se H for azul, temos o triângulo retângulo azul ACH. Se H for preto, DHE será um triângulo retângulo preto. E finalmente, se H for vermelho, o triângulo GFH será retângulo e vermelho.



□

Problema 22. Em um torneio de xadrez há $2n+3$ participantes. Cada par de participantes joga exatamente uma partida entre si. Os jogos são arranjados de modo que não haja dois jogos simultâneos, e cada participante, após jogar uma partida, fica livre durante as próximas n partidas. Prove que um dos participantes que jogou na primeira partida também vai jogar a última partida.

Para cada jogador denominaremos a sua parada como sendo o número de jogos entre duas partidas consecutivas, incluindo a partida seguinte. Com isso todas as paradas são iguais a, no mínimo, $n+1$.

Considere $n+3$ partidas consecutivas $p_1, p_2, \ldots, p_{n+3}$ com $2n+6$ jogadores envolvidos (claro que há repetições!). Afirmamos que no máximo 3 jogadores poderão participar em dois desses jogos. Isso é verdade, pois supõe que o jogador A participe de p_1 e p_{n+2}, o jogador B participe de p_1 e g_{n+3}, o jogador C participe de p_2 e p_{n+3}, não é possível nenhum outro jogar duas vezes. Logo as paradas são de tamanho $n+1$ ou $n+2$ apenas!

Assim é suficiente provar que um jogador teve todas as paradas iguais a $n+2$, já que o total de jogos é igual $\binom{2n+3}{2} = (2n+3)(n+1) = 1 + (2n+1)(n+2)$.

Supõe que isso seja falso, ou seja, que todos os jogadores tiveram pelo menos uma parada de tamanho $n+1$. Considere A o último jogador a ter uma parada de $n+1$, ou seja, até essa jogada A sempre parou $n+2$ e todos os outros já pararam $n+1$ jogos pelo menos uma vez. Seja b o número do jogo que A fez após a sua primeira parada de tamanho $n+1$ e seu adversário foi B. Além disso, denomine de a o jogo que B fez antes de sua última parada de $n+1$ jogos. Logo entre o jogo $a+n+1$ e o jogo b, B faz apenas paradas de tamanho $n+2$ e assim $b = a + (n+1) + k(n+2)$ para algum inteiro positivo k. Já sabemos que todas as paradas de A antes do jogo b foram de tamanho $n+2$. Se ele teve pelo menos k paradas, então disputou o jogo a com B, mas isso é impossível. Por outro lado, se ele teve no máximo $k-1$ paradas de tamanho $n=2$, então seu primeiro jogo foi no mínimo $b-(n+1)-(k-1)(n+2) = a+(n+2) \geqslant n+3$. Portanto no máximo $2n+2$ jogadores participaram das $n+2$ primeiras partidas, mas isso só seria possível se o jogo 1 e o $n+2$ fossem disputados pelos mesmo jogadores, o que também dá uma contradição.

Com isso concluímos que um jogador teve todas as suas paradas de tamanho $n+2$ e jogou a primeira e a última partida. $\square$

Problema 23. Nove vértices de um icoságono (polígono de vinte lados) regular são pintados da mesma cor. Prove que podemos encontrar três deles formando um triângulo isósceles.

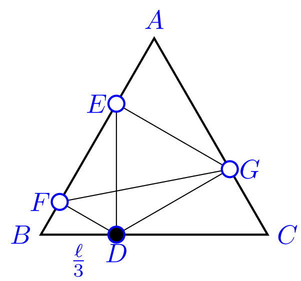
Numere os vértices sucessivos de 1 a 20 no sentido horário.

Cada um dos quatro conjuntos de vértices $\{1,5,9,13,17\}, \{2,6,10,14,18\}, \{3,7,11,15,19\}$,

$\{4,8,12,16,20\}$ é formado por cinco vértices que formam um pentágono regular. Como pintamos nove pontos de vermelho temos, pelo PGD, que há pelo menos três desses pontos no mesmo conjunto. Como quaisquer três vértices de um pentágono regular formam um triângulo isósceles, segue o resultado. $\square$

Problema 24. Cada ponto do perímetro de um triângulo equilátero é pintado de uma de duas cores. Mostre que é possível escolher três pontos da mesma cor formando um triângulo retângulo.

Considere o triângulo equilátero ABC de lado ℓ da figura a seguir. Faremos algumas construções e posteriormente atacaremos o problema. Seja D o ponto sobre o lado BC, de modo que a distância até B é $\frac{\ell}{3}$. A reta perpendicular a BC, pelo ponto D, intersecta o lado AB no ponto E. A reta perpendicular a AB, pelo ponto D, intersecta o lado AB no ponto F. A reta perpendicular a AC, pelo ponto D, intersecta o lado AC no ponto G. O triângulo DFE é retângulo por construção, e o triângulo FEG também é retângulo (mostre que o ângulo $F\widehat{E}G$ é reto!).



Vamos supor, sem perda de generalidade, que o ponto D está pintado de preto, e, assim, consideremos as oito possíveis colorações dos pontos E, F e G.

Caso	1	2	3	4	5	6	7	8
E	P	P	P	B	B	B	P	B
F	P	P	B	P	P	B	B	B
G	P	B	P	P	B	P	B	B

Como o triângulo FEG é retângulo, segue que o problema está provado nos casos 1 e 8. Caso ocorra 2 também, temos o triângulo retângulo monocromático (preto) DFE.

Caso 3: se houver um outro ponto preto X diferente de G no lado AC, temos que DGX é um triângulo que satisfaz o problema. Outra possibilidade é que todos os pontos do lado AC, exceto G, sejam brancos. Assim, podemos traçar a projeção ortogonal (ponto X) de F sobre AC e marcamos mais um ponto Y sobre AC diferente de G, e o triângulo FXY satisfaz o problema.

Caso 4: semelhante ao caso anterior, trocando F por E.

Caso 5: se existir um ponto preto X diferente de F sobre o lado AB temos que XFD satisfaz a condição do problema. Por outro lado, se todos os pontos sobre o lado AB, exceto F, forem brancos, basta tomar um desses pontos, digamos Y, e o triângulo YEG resolve a questão.

Caso 6: se existir um ponto preto X sobre AC, diferente de G, use o triângulo DGX. Caso contrário, todos os pontos sobre o lado AC, exceto G são brancos. Basta tomar a projeção ortogonal de F sobre AC e mais um ponto diferente desse e de G e temos a solução.

Caso 7: se existir um ponto preto X sobre BC diferente de D, então toma o triângulo EDX. Caso todos os pontos sobre BC, exceto D, sejam brancos, basta tomar o ponto projeção de G sobre BC e mais um ponto sobre BC diferente de D e está resolvido. □

Problema 25. O plano é pintado usando três cores. Prove que podemos encontrar um triângulo retângulo isósceles com os três vértices da mesma cor.

Vamos trabalhar com um reticulado, que pode representar o plano com pontos nas coordenadas inteiras.

O problema supõe um reticulado infinito, mas só precisaremos de um reticulado 3000×3000. Para começar, note que existem 3000 pontos na diagonal principal do nosso reticulado.

Pelo PGD, pelo menos 1000 desses pontos têm a mesma cor, vamos supor azul. Analisando esses 1000 pontos azuis, escolhendo dois a dois como vértices de um triângulo, podemos formar $\binom{1000}{2} = 499500$ triângulos retângulos isósceles diferentes, usando os pontos abaixo da diagonal principal. Se algum dos 499500 novos vértices dos triângulos for azul, o problema estará resolvido.

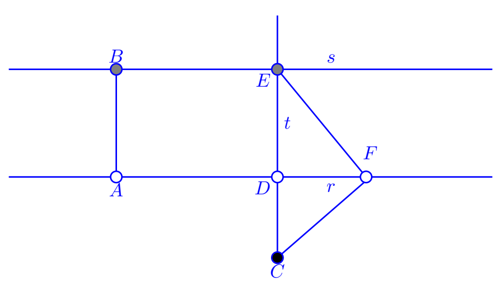
Caso nenhum seja azul, então eles estarão divididos entre vermelhos e pretos, e, também pelo PGD, pelo menos $499500/2 = 249750$ deles vai ter uma mesma cor, digamos preto. Note que esses pontos pretos estarão divididos nas 2999 subdiagonais abaixo da diagonal principal. O PGD garante-nos que existirá pelo menos uma subdiagonal S com pelo menos $\lceil 249750/2999 \rceil = 84$ pontos pretos.

Também escolhendo entre esses 84 pontos pretos, dois a dois, podemos formar $\binom{84}{2} = 3486$ triângulos retângulos isósceles abaixo da subdiagonal S. Se algum dos novos vértices dos triângulos for preto, o problema está provado.

Caso nenhum deles seja preto, note que também não podem ser azuis, pois esses novos vértices são também vértices dos triângulos definidos pelos pontos azuis do caso inicial (verifique isso), e estamos supondo que nenhum deles seja azul. Assim sendo, caso nenhum seja preto, serão todos vermelhos. Temos então 3486 pontos vermelhos. Esses 3486 pontos vermelhos estão divididos entre as outras subdiagonais abaixo de S, que são no máximo 2998. Pelo PGD, pelo menos $\lceil 3486/2998 \rceil = 2$ pontos estarão numa mesma subdiagonal D. Estes dois pontos vermelhos formam um triângulo retângulo isósceles com um ponto abaixo da subdiagonal D. Para mostrar que esse ponto é vermelho, basta verificar que ele faz parte dos 499500 que supomos não serem azuis, e dos 3486 que supomos não serem pretos. $\square$

Problema 26. Cada ponto do plano é pintado de uma de três cores, sendo cada cor usada pelo menos uma vez. Prove que podemos encontrar um triângulo retângulo cujos vértices são de cores distintas.

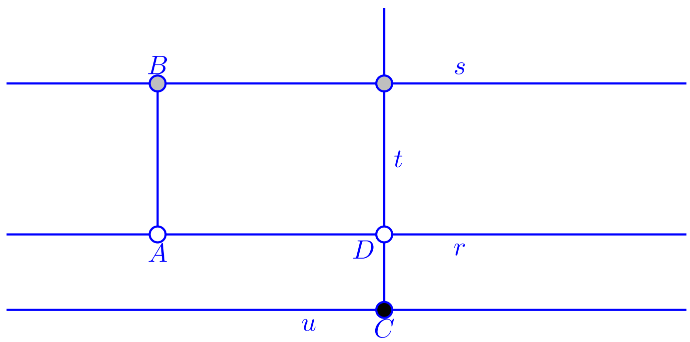
Vamos supor que as três cores sejam branco, preto e cinza. Consideremos um ponto branco A e um cinza B. Agora tracemos as duas retas r e s perpendiculares ao segmento AB, uma passando por A, e outra por B. Caso haja um ponto de cor preta em uma das retas r ou s, o resultado está provado. Caso contrário não haverá ponto de cor preta sobre nenhuma das retas. Então há um ponto C de cor preta fora das retas r e s. Trace uma reta t, passando por C que seja perpendicular a r e s. Se o ponto E de interseção de t e s for branco, acabou. Caso contrário o ponto é cinza. Nessa situação, se houver um ponto branco sobre s, o problema está resolvido. A outra possibilidade é que todos os pontos sobre s sejam cinzas. Raciocínio semelhante pode ser feito na interseção entre t e r. A situação não estará resolvida caso todos os pontos sobre s sejam cinzas e todos os pontos sobre r sejam brancos. Vamos considerar D o ponto de interseção entre r e t, e E o ponto de interseção das retas s e t. Agora basta construir um ponto F sobre a reta r, de modo que o ângulo $E\widehat{F}C$ seja reto. Os outros casos deixamos para o leitor.



Problema 27. Cada ponto do plano de coordenadas inteiras é pintado de uma de três cores, sendo cada cor usada pelo menos uma vez. Prove que podemos encontrar um triângulo retângulo cujos vértices são de cores distintas.

Adapte a demonstração do exercício anterior, mas agora os pontos têm coordenadas inteiras. Construa uma reta u paralela a r, passando por C. Se u tiver um ponto com a cor branca ou cinza, acabou! Caso contrário, todos os pontos de u serão da cor preta.

Vamos supor que todos os pontos de r sejam brancos, que os pontos de u sejam pretos e que os pontos de s sejam cinzas. Além disso, podemos supor que s é a reta $y = h$, r é a reta $y = 0$ e u é a reta $y = -t$, com h e t positivos. O triângulo de vértices $X = (h, h)$ (ponto cinza), $Y = (h+t, 0)$ (ponto branco) e $Z = (t, -t)$ é um triângulo retângulo ($X\widehat{Y}X$ é reto).



Problema 28. Em um grupo de 29 *hobbits* existem alguns deles que falam a verdade e os outros que sempre mentem. Em um certo dia de primavera, todos eles sentaram-se ao redor de uma mesa, e cada um deles falou que seus dois vizinhos eram mentirosos.

a) Prove que pelo menos 10 *hobbits* falavam a verdade.

b) É possível que exatamente 10 deles falem a verdade?

Observe que não podem haver três hobbits mentirosos vizinhos, pois nesse caso o hobbit do meio diria que seus vizinhos falam a verdade.

a) Suponha que haja no máximo nove hobbits que falam a verdade. Assim teremos, no máximo nove espaços entre eles e assim só será possível colocar no máximo 18 hobbits mentirosos sem que haja três mentirosos vizinhos. Assim haveria no máximo 27 hobbits, o que dá uma contradição.

b) É possível haver exatamente dez hobbits que falam a verdade, veja duas configurações abaixo, onde eles estão listados da posição 1 até a 29 e em que V significa uma hobbit que fala a verdade e M um mentiroso.

$VMMVMMVMMVMMVMMVMMVMMVMMVMMVM$.

$MVMMVMMVMMVMMVMMVMMVMMVMMVMMV$. □

Referências

[1] Steffenon, R. R.; Guarnieri, F. M. **Belos Problemas de Matemática Discreta**. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.