# *Problemas Diversos em Contagem Dupla*

## *Prof. Davi Lopes – Semana Olímpica 2022 (Nível 2)*

## *1. Entendendo o Princípio da Contagem Dupla*

***Exemplo 1 (OBM/2009):*** O professor Piraldo aplicou uma prova de 6 questões para 18 estudantes. Cada questão vale 0 ou 1 ponto; não há pontuações parciais. Após a prova, Piraldo elaborou uma tabela como a seguinte para organizar as notas, em que cada linha representa um estudante e cada coluna representa uma questão.

| Questões → <br> Estudantes ↓ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Arnaldo | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| Bernaldo | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| Cernaldo | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| ⋮ | | | ⋮ | | | |

***Exemplo 2:*** Em um programa de treinamento militar, que durou $N$ noites, participaram 19 soldados. Toda noite, três desses soldados são escolhidos para ficar de vigia. Sabendo que quaisquer dois soldados ficaram de vigia em exatamente uma noite, determine o valor de $N$.

***Exemplo 3:*** Uma bola de futebol é feita com 32 peças de couro. 12 delas são pentágonos regulares e as outras 20 são hexágonos também regulares. Os lados dos pentágonos são iguais aos dos hexágonos de forma que possam ser costurados. Cada costura une dois lados de duas dessas peças. Quantas são as costuras feitas na fabricação de uma bola de futebol?

***Solução:*** Seja $n$ o número de costuras que vamos fazer. Perceba que cada aresta

***Exemplo 4 (Princípio de Fubini):*** Sejam $m, n$ inteiros positivos e $a_{ij}$ números reais, para cada $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Prove que:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)$$

Ou seja, num somatório duplo, podemos "trocar" os somatórios de lugar, se as variáveis desse somatório forem independentes (ou seja, podemos variar livremente uma delas no somatório sem interferir na outra variável).

## 2. Montando Tabelas para Fazer Contagem Dupla

***Exemplo 5:*** Uma ilha tem $12k$ habitantes, $k$ inteiro positivo. Cada habitante conhece exatamente $3k + 6$ outros habitantes na ilha (conhecer é uma relação simétrica). Sabe-se que existe um inteiro $n$ tal que quaisquer dois habitantes da ilha têm exatamente $n$ conhecidos em comum na ilha. Determine o valor de $n$ e de $k$.

*Observação:* não precisar dar um exemplo com tais valores de $n$ e $k$.

***Exemplo 6 (IMC):*** Duzentos estudantes participaram de uma competição de matemática. A prova tinha seis problemas. Sabe-se que cada problema foi resolvido por pelo menos 120 participantes. Prove que existem dois estudantes tais que cada problema foi resolvido por pelo menos um deles.

***Exemplo 7 (USAMO/2011):*** Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_{11}$ conjuntos tais que $|A_i| = 45$, para $i = 1, \ldots, 11$, e $|A_i \cap A_j| = 9$, para $1 \leq i < j \leq 11$. Prove que $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{11}| \geq 165$ e dê um exemplo em que a igualdade ocorre.

## 3. Um Grafo sem Chifres é um Animal Indefeso!

***Exemplo 8 (OBM/2011):*** Um álbum, composto por 2011 figurinhas, está sendo colecionado por 33 amigos. Uma distribuição de figurinhas entre os 33 amigos é incompleta quando existe pelo menos uma figurinha que nenhum dos 33 amigos tem. Determinar o menor valor de $m$ com a seguinte propriedade: toda distribuição de figurinhas entre os 33 amigos tal que, para quaisquer dois dos amigos, faltam, para ambos, pelo menos $m$ figurinhas em comum, é incompleta.

***Exemplo 9 (IMO/1998):*** Numa competição, existem $a$ concorrentes e $b$ juízes, em que $b \geq 3$ é um inteiro ímpar. Cada juiz avalia cada um dos concorrentes, classificando-o como "aprovado" ou "reprovado". Suponha que $k$ é um número tal que as classificações dadas por dois juízes quaisquer coincidem no máximo para $k$ concorrentes. Prove que:

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$

***Exemplo 10 (Cone Sul TST/2022):*** Considere um tabuleiro $11 \times 11$ em que cada casa é colorida de vermelho, azul ou amarelo. Mostre que existem quatro casas de mesma cor cujos centros são vértices de um retângulo com lados paralelos aos lados do tabuleiro.

***Exemplo 11:*** Na terra de Oz há *n* castelos e várias estradas, sendo que cada uma delas liga dois castelos e não há mais do que uma estrada ligando diretamente dois castelos. Diz a lenda que se houver quatro castelos ligados em ciclo (ou seja, se existirem quatro castelos *A*, *B*, *C* e *D* tais que *A* e *B*, *B* e *C*, *C* e *D* e *D* e *A* estão ligados), um dragão aparecerá do centro dos castelos e destruirá a Terra de Oz. Mostre que para esta desgraça não acontecer o número de estradas deve ser menor ou igual a:

$$\frac{\left(1 + \sqrt{4n-3}\right)n}{4}$$

## 4. Cores e Contagem Dupla

***Exemplo 12:*** São dados $n$ pontos no plano, sem que haja 3 deles colineares. Para cada par de pontos, traçamos entre eles um segmento azul ou um segmento vermelho. Sabendo que em cada ponto incidem $k$ segmentos azuis, determine a quantidade de triângulos monocromáticos determinados por 3 desses $n$ pontos (isto é, triângulos com seus lados sendo todos azuis ou todos vermelhos.

***Exemplo 13 (Lema de Sperner):*** Dividimos um triângulo grande, cujos vértices são rotulados 1, 2 e 3, em triângulos menores de modo que quaisquer dois dentre os triângulos menores ou não têm ponto em comum, ou têm um vértice em comum ou tem um lado (completo) em comum. Os vértices dos triângulos menores são numerados: 1, 2 ou 3. A numeração é arbitrária, exceto que os vértices sobre as arestas do triângulo maior oposto ao vértice *i* não podem receber o número $i$. Mostre que entre os triângulos menores existe um com os vértices 1, 2, 3.

***Exemplo 14 (IMO Shortlist/2016):*** Seja $n$ um inteiro positivo relativamente primo com 6. Pintamos os vértices de um $n$-ágono regular com três cores, de modo que exista um número ímpar de vértices de cada cor. Prove que existe um triângulo isósceles cujos três vértices são de cores distintas.

## 5. E Quando a Contagem Dupla Der Errado?

***Exemplo 15 (China/1993):*** Um grupo de 10 pessoas foi a uma livraria. Sabe-se que:

- Todo mundo comprou exatamente 3 livros;
- Para quaisquer duas pessoas, existe pelo menos um livro que ambos compraram.

Qual é o menor número de pessoas que poderiam ter comprado o livro comprado pelo maior número de pessoas?

***Exemplo 16 (BMO/1985):*** Em um encontro internacional, 1985 pessoas estiveram presentes. Em cada subconjunto de três participantes, existem no mínimo 2 pessoas que falam a mesma língua. Se cada pessoa fala no máximo 5 línguas, prove que no mínimo 200 pessoas falam uma mesma língua.

***Exemplo 17 (IMO/2005):*** Numa competição de matemática na qual foram propostos 6 problemas, quaisquer dois problemas foram resolvidos por mais de 2/5 dos estudantes. Além disso, nenhum estudante resolveu todos os 6 problemas. Mostre que existem pelo menos 2 estudantes que resolveram 5 problemas cada um.

***Exemplo 18:*** Seja $A$ um conjunto com $n$ elementos e sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ subconjuntos de $A$ tais que $|A_i| \geq 2$, para cada $1 \leq i \leq n$. Suponha que para cada $2-$ subconjunto $A'$ de $A$, existe um único índice $i$ tal que $A'$ é um subconjunto de $A_i$. Mostre que para todos os pares $(i, j)$ tais que $1 \leq i < j \leq n$, temos $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.

## 6. Exemplos Adicionais

***Exemplo 19:*** Um triângulo é um conjunto de três vértices ligados dois a dois. Prove que um grafo com $m$ arestas e $n$ vértices tem pelo menos

$$\frac{4m\left(m-\frac{n^2}{4}\right)}{3n}$$

Triângulos.

***Exemplo 20 (IMO/1989):*** São dados $n$ e $k$ inteiros positivos e um conjunto $S$ de $n$ pontos no plano tais que não há três pontos em $S$ colineares, e que para qualquer ponto $P$ de $S$ existem pelo menos $k$ pontos de $S$ equidistantes de $P$. Prove que $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

***Exemplo 21 (IMO Shortlist/2014):*** São dados $n$ pontos dentro de um retângulo $R$, tal que não há dois deles numa reta paralela a qualquer lado de $R$. O retângulo $R$ é dissecado em retângulos menores com lados paralelos aos lados de $R$, de tal modo que nenhum desses retângulos contenha quaisquer dos pontos dados em seu interior. Prove que dissecamos $R$ em pelo menos $n + 1$ retângulos menores.

***Exemplo 22 (Ibero/2008):*** Numa partida de biribol enfrentam-se duas equipes de quatro jogadores cada uma. Organiza-se um torneio de biribol em que participam n pessoas, que formam equipes para cada partida (as equipes não são fixas). No final do torneio observou-se que cada duas pessoas disputaram exatamente uma partida em equipes rivais. Para que valores de $n$ é possível organizar um torneio com tais características?

***Exemplo 23 (OBM/1999):*** Temos um tabuleiro quadrado $10 \times 10$. Desejamos colocar $n$ peças em casas do tabuleiro de tal forma que não existam 4 peças formando em retângulo de lados paralelos aos lados do tabuleiro. Determine o maior valor de $n$ para o qual é possível fazer esta construção.

***Exemplo 24 (IMO Shortlist/2012):*** Num tabuleiro $999 \times 999$, algumas casas são brancas e as restantes são vermelhas. Seja $T$ o número de triplas $(C_1, C_2, C_3)$ de casas, onde $C_1, C_2$ estão na mesma linha, $C_2, C_3$ estão na mesma coluna, $C_1, C_3$ são brancas e $C_2$ é vermelha. Determine o maior valor possível que $T$ pode atingir.

***Exemplo 25 (CIIM/2020):*** Sejam $m, r, s, t$ inteiros positivos tais que $m \geq s + 1$ e $r \geq t$. Considere $m$ conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_m$ com $r$ elementos cada um. Suponha que para todo $1 \leq i \leq m$, existem pelo menos $t$ elementos de $A_i$ que pertencem, cada um deles, a pelo menos $s$ conjuntos $A_j$, com $j \neq i$. Determine o maior número possível de elementos do conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$.