A Reta de Simson-Wallace e O Ponto de Miquel

Jorge Craveiro

Resumo: Neste treinamento, usando técnicas de quadriláteros inscritíveis e o consagrado "arrastão de ângulos", obteremos um dos mais icônicos resultados de geometria plana: a Reta de Simson. Além desse, outros resultados brilhantes, até mesmo associados a essa reta, serão demonstrados, em particular o Ponto de Miquel. Vamos também resolver o problema 2 da prova da OBM 2022 de Nível 2!

Reta de Simson-Wallace:

Seja ABC um triângulo inscrito no círculo W, e seja P um ponto qualquer. Sejam X, Y e Z as projeções ortogonais de P sobre as retas BC, AC e AB, respectivamente. Os pontos X, Y e Z serão colineares (formando a tal "reta de Simson de P em relação ao triângulo ABC") se, e somente se, o ponto P pertence a W.

Seguem mais alguns resultados sobre a Reta de Simson:

1) Seja P um ponto sobre a circunferência W circunscrita ao triângulo ABC, cujo ortocentro é o ponto H. Seja L o ponto de interseção da reta de Simson com a reta AH. Seja X' a interseção da reta PX novamente com o círculo W. A reta de Simson é paralela a AX', e, portanto, LAX'X é um paralelogramo.

2) Do resultado acima, podemos concluir que a reta de Simson do ponto P bissecta o segmento HP.

3) [Reta de Steiner] Seja P um ponto sobre a circunferência W circunscrita ao triângulo ABC, cujo ortocentro é o ponto H. Sejam X', Y' e Z' as reflexões de P em relação aos lados BC, AC e AB, respectivamente. São colineares os pontos H, X', Y' e Z' (formando a "reta de Steiner de P em relação ao triângulo ABC")

Ponto de Miquel:

Quatro retas concorrentes duas a duas determinam quatro triângulos. Os circuncírculos desses quatro triângulos são concorrentes num mesmo ponto, chamado de Ponto de Miquel.

PROBLEMAS:

1) Num triângulo ABC, prove que as projeções de A sobre as bissetrizes internas e externas traçadas a partir dos vértices B e C são colineares.

2) Num triângulo ABC, sejam D, E e F os pés das alturas em BC, AC e AB, respectivamente. Prove que as projeções de D sobre as retas AB, BE, CF e AC são colineares.

3) Tome M um ponto sobre o circuncírculo do triângulo ABC qualquer. Sejam X, Y e Z as interseções dos círculos de diâmetro AM, BM e CM com o circuncírculo de ABC, respectivamente. Prove que os pontos X, Y e Z são colineares.

4) No triângulo ABC, AD e AM são bissetriz interna e mediana, respectivamente. Sejam X e Y as projeções de D sobre os lados AB e AC, respectivamente. Uma perpendicular ao lado BC através do ponto D corta o segmento XY no ponto P. Prove que A, P e M são colineares.

5) Os pontos A, B e C estão sobre uma reta, e P é um ponto qualquer fora dessa reta. Prove que o ponto P e os circuncentros dos triângulos PAB, PAC e PBC formam um quadrilátero inscritível.

6) Sejam A, B, C, P e Q pontos sobre um círculo. Mostre que o ângulo formado pelas retas de Simson de P e Q em relação ao triângulo ABC é igual à metade do arco PQ.

7) (Hong Kong 1998) Seja PQRS um quadrilátero inscritível com ângulo PSR = 90°, e sejam H e K as projeções de Q nas retas PR e PS. Prove que HK bissecta QS.

8) (USA TST2014) Seja ABC um triângulo acutângulo, e seja X um ponto variável no interior do arco menor BC do circuncírculo de ABC. Sejam P e Q os pés das perpendiculares de X às retas CA e CB, respectivamente, e seja R a interseção da reta PQ e da perpendicular de B ao lado AC. Seja r a reta através de P paralela a XR. Prove que, variando-se X, a reta r sempre passa por um ponto fixo.

9) Seja ABC um triângulo de incentro I e incírculo W. Os pontos de tangência de W com os lados BC, AC e AB são, respectivamente, D, E e F, e as interseções de AI, BI e CI com W são os pontos M, N e P. Demonstre que, para um ponto qualquer X em W, as retas de Simson de X em relação ao triângulo DEF e de X em relação a MNP são perpendiculares entre si.

10) [Teorema de Miquel] Sobre os lados AB, BC e AC do triângulo ABC, respectivamente, tomam-se os pontos M, N e P quaisquer. Mostre que as circunferências circunscritas aos triângulos AMP, BNM e CPN concorrem em um ponto O, comum às três circunferências.

11) [Teorema de Steiner] Quatro retas concorrentes duas a duas formam quatro triângulos, e seu ponto de Miquel. Prove que os circuncentros dos quatro triângulos são concíclicos, junto com o ponto de Miquel.

12) [Reta de Aubert] No enunciado acima, prove que os ortocentros dos quatro triângulos estão numa mesma reta.

13) O quadrilátero ABCD é inscritível, e seus lados definem quatro retas, que definem quatro triângulos. Mostre que o ponto de Miquel associado pertence à reta que une as interseções dos prolongamentos dos lados opostos de ABCD.

14) Os pontos A, B, C e D estão num círculo de centro O. As retas AB e CD se intersectam em E, e os circuncírculos dos triângulos AEC e BED se intersectam nos pontos E e P. Prove que: i) os pontos A, D, P e O são concíclicos; ii) o ângulo EPO é reto.