Ser Extremo ou Não?

Maria Clara Werneck
mclarawerneck@gmail.com

1 Introdução

Ser uma pessoa extremista pode ser ruim em várias áreas da vida, mas ao pensar em problemas de matemática pode te dar muitas ideias de como o problema se comporta. Vamos falar sobre o **Princípio Extremal**.

Às vezes é chamado de método variacional. A ideia é olhar para máximos ou minímos de uma função (*que função? qual objeto?*). Então, com essa propriedade, você prova outras olhando para **variação** dessa função. Muitas vezes, o princípio extremal te dá o algoritmo para construir o que quer?

Você quer provar propriedade P. Então usa a propriedade Q, tal que $Q \to P$. Agora, como achar a propriedade Q? Como reconhecer o que deve variar? **Não é fácil ver o que você deve usar, mas esse método pode facilitar sua solução! :)**

2 Ideias Geométricas

Problema 1. (Austrália 91) São dados $n \geq 3$ pontos no plano tais que a área de um triângulo formado por quaisquer três deles é no máximo 1. Prove que os n pontos estão em um triângulo de área no máximo 4.

Problema 2. (Teorema de Sylvester) Um conjunto finito S de pontos no plano possui a seguinte propriedade: qualquer reta que passa por dois pontos de S passa por um terceiro ponto de S. Prove que todos os pontos de S estão sobre uma mesma reta.

Problema 3. (Putnam 1979) Sejam $2n$ pontos no plano escolhidos de modo que quaisquer 3 não são colineares, n deles são pintados de vermelho e n deles são pintados de azul. Prove que é possível parear os pontos usando segmentos ligando cada ponto vermelho a exatamente um ponto azul de modo que esses segmentos não se cortem.

Problema 4. Há n aeroportos no Brasil. A distância de cada aeroporto para outro são todas diferentes. Cada aereporto tem um avião no dia 0. A cada dia, saem os aviões de todos os aeroportos para o aeroporto mais perto. Prove que existe um par de aeroportos cujos aviões voaram um para outro no dia 1.

Problema 5. Há infinitos pontos azuis e vermelhos no plano com a seguinte propriedade: todo segmento de reta que liga dois pontos da mesma cor contém um ponto da outra cor. Mostre que todos os pontos estão sob a mesma linha reta.

3 Ideias Combinatóricas

Problema 6. Colocamos torres em um tabuleiro de xadrez $n \times n$. Sabe-se que, para cada casa que não contém uma torre, a linha e a coluna desta casa possuem juntas pelo menos n torres. Prove que pelo menos metade das casas possuem torres.

Problema 7. Toda estrada no Rio de Janeiro é mão única. Todo par de cidades está conectado com exatamente uma estrada de mão única. Prove que existe uma cidade que pode ser alcançada por todas as cidades, seja diretamente, seja via no máximo uma cidade.

Problema 8. Cada jogador de um time de futebol tem no máximo 3 inimigos. Prove que o time de futebol pode ser dividido em duas casas de modo que cada jogador não tenha mais do que um inimigo na sua casa.

Problema 9. Há n estudantes em cada uma das 3 escolas. Qualquer estudante possui exatamente $n+1$ conhecidos nas outras duas escolas. Prove que podemos selecionar um estudante para cada escola de modo que os três estudantes selecionados se conheçam.

Problema 10. Na Semana Olímpica, para qualquer par de pessoas, existe exatamente outra pessoa que conhece ambas. Mostre que existe alguém na Semana Olímpica que conhece todo mundo.

Problema 11. (OBM NU 2020) Seja n um inteiro positivo. Numa nave espacial estão $2n$ pessoas, e quaisquer duas delas são amigas ou inimigas (a amizade/inimizade é simétrica). Dois alienígenas fazem a seguinte brincadeira: Alternadamente, cada jogador escolhe uma pessoa por vez, de modo que a pessoa escolhida a cada turno seja amiga da pessoa escolhida pelo adversário no turno anterior (no primeiro turno, o primeiro jogador pode escolher qualquer pessoa). Quem não puder mais jogar, perde (uma pessoa só pode ser escolhida uma vez). Prove que o segundo jogador possui estratégia vencedora se, e somente se, as $2n$ pessoas podem ser divididas em n pares, de modo que quaisquer duas pessoas num mesmo par sejam amigas.

4 Ideias de Teoria dos Números

Problema 12. Não tem quádrupla de inteiros positivos (x, y, z, u) satisfazendo $x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)$.

Problema 13. $n\sqrt{2}$ não é inteiro para nenhum inteiro positivo n.

5 Ideias Algébricas

Problema 14. Considere um tabuleiro de xadrez infinito em que em suas casas foram preenchidas com números inteiros postivos. Cada um desses números é igual à média aritmética de seus quatro vizinhos (da esquerda, direita, em cima e embaixo). Mostre que todos os números escritos são iguais.

Problema 15. (IMO 1983) Existem 1983 inteiros distintos dois a dois menores que 100000 tal que não há três em progressão aritmética?

6 Referência

[1] Engel, Arthur, Problem-Solving Strategies, chapter 3, The Extremal Principal