Trigonometria em Geometria

Semana Olímpica 2022 - Pernambuco

Rafael Filipe - rafaelfilipedoss@gmail.com

Este material pressupõe que você saiba as definições básicas de trigonometria, bem como saber lidar com o círculo trigonométrico. Caso você não saiba, este conteúdo pode ser encontrado na maioria dos livros de ensino médio.

1 Principais relações trigonométricas

1.1 Relações fundamentais

- $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$;
- $1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$.

1.2 Trocas importantes

- $\text{sen}(\pi - x) = \text{sen} x$;
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$;
- $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen} x$;
- $\text{sen}\ x = -\text{sen}(-x)$;
- $\cos\ x = \cos(-x)$.

1.3 Soma e subtração de arcos

- $\text{sen}(a + b) = \text{sen}\ a \cdot \cos\ b + \text{sen}\ b \cdot \cos\ a$;
- $\text{sen}(a - b) = \text{sen}\ a \cdot \cos\ b - \text{sen}\ b \cdot \cos\ a$;
- $\cos(a + b) = \cos\ a \cdot \cos\ b - \text{sen}\ b \cdot \text{sen}\ a$;
- $\cos(a - b) = \cos\ a \cdot \cos\ b + \text{sen}\ b \cdot \text{sen}\ a$;
- $\text{tg}(a + b) = \dfrac{\text{tg}\ a + \text{tg}\ b}{1 - \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ b}$;
- $\text{tg}(a - b) = \dfrac{\text{tg}\ a - \text{tg}\ b}{1 + \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ b}$.

1.4 Arco duplo e arco metade

- $\cos\ 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$;
- $\cos\ 2x = 2 \cdot \cos^2 x - 1$;
- $\cos\ 2x = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 x$;
- $\text{sen}\ 2x = 2 \cdot \text{sen} x \cdot \cos x$;
- $\text{tg}\ 2x = \dfrac{2 \cdot \text{tg} x}{1 - \text{tg}^2 x}$;
- $\text{sen}\ \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\ x}{2}}$;
- $\cos\ \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\ x}{2}}$;
- $\text{tg}\ \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\ x}{1 + \cos\ x}}$.

1.5 Transformações de produto em soma

- $\text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b = \frac{1}{2} \cdot (\cos(a - b) - \cos(a + b))$;
- $\cos\ a \cdot \cos\ b = \frac{1}{2} \cdot (\cos(a - b) + \cos(a + b))$;
- $\text{sen}\ a \cdot \cos\ b = \frac{1}{2} \cdot (\text{sen}(a + b) + \text{sen}(a - b))$.

1.6 Mudança de fase

- $a \cdot \text{sen}\ x + b \cdot \cos\ x = R \cdot \text{sen}(x + \theta)$ sendo $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ e θ tal que $\tan\theta = \frac{b}{a}$.

1.7 Transformações de soma em produto

- $\text{sen } a + \text{sen } b = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$;
- $\text{sen } a - \text{sen } b = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$;
- $\cos a + \cos b = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$;
- $\cos a - \cos b = -2 \cdot \text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

2 Relações métricas no triângulo

2.1 Convenções iniciais

A partir de agora, façamos algumas convenções que utilizaremos ao longo deste material. Seja ABC um triângulo. Então:

- Os ângulos são dados por $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$ e $\angle ACB = \gamma$;
- Os lados são dados por $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$;
- O raio da circunferência circunscrita é R;
- O raio da circunferência inscrita é r;
- O perímetro é $2p$, em que $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o *semiperímetro*;
- A área do triângulo é S;
- As alturas do triângulo relativa aos vértices A, B e C são h_a, h_b e h_c, respectivamente;
- Os raios das circunferências exinscritas relativas aos vértices A, B e C são r_a, r_b e $_c$, respectivamente.

2.2 Lei dos senos

Teorema 2.1. Em um triângulo ABC vale que

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} = 2R.$$

2.3 Lei dos cossenos

Teorema 2.2. Em um triângulo ABC, vale que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

2.4 Teorema de Stewart

Teorema 2.3. Seja ABC um triângulo e D um ponto sobre o lado BC. Se $BD = m$, $CD = n$ e $AD = d$, vale que

$$m \cdot c^2 + n \cdot b^2 = a \cdot (d^2 + m \cdot n).$$

2.5 Outras fórmulas trigonométricas no triângulo

- sen $\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$;
- cos $\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$;
- sen $\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}$;
- cos $\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}$;
- sen $\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$;
- cos $\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$;
- $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + \frac{r}{R}$.

Uma ideia muito comum é fazer $R = 1/2$. Nesse caso, pela lei dos senos, temos $a = \text{sen}\,\alpha$, $b = \text{sen}\,\beta$ e $c = \text{sen}\,\gamma$. Nesse caso, há algumas fórmulas interessantes que podem ser obtidas:

- $2p = 4 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$;
- $S = \frac{\text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta \cdot \text{sen}\,\gamma}{2}$;
- $r = 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta \cdot \text{sen}\,\gamma$;
- $p - a = 2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \text{sen}\frac{\beta}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{\gamma}{2}$.
- $p - b = 2 \cdot \text{sen}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{\gamma}{2}$.
- $p - c = 2 \cdot \text{sen}\frac{\alpha}{2} \cdot \text{sen}\frac{\beta}{2} \cdot \cos\,\frac{\gamma}{2}$.

2.6 Fórmulas para a área de um triângulo

- $S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$;
- $S = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\,\alpha}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \text{sen}\,\beta}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\,\gamma}{2}$;
- $S = \frac{abc}{4R}$;
- $S = pr$;
- $S = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c)$;
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Heron);

3 Teoremas avançados

3.1 Teorema da ceviana qualquer

Teorema 3.1. Seja ABC um triângulo e AD uma ceviana, com D sobre BC. Então:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\text{sen}(\angle BAD)}{\text{sen}(\angle CAD)}.$$

3.2 Truque da cotagente

Teorema 3.2. Se x, y, z, $w \in (0, 180^\circ)$ são tais que $x + y = z + w$ e

$$\frac{\text{sen } x}{\text{sen } y} = \frac{\text{sen } z}{\text{sen } w},$$

então $x = z$ e $y = w$.

3.3 Teorema de Ceva trigonométrico

Teorema 3.3. Sejam ABC um triângulo, α_1, α_2 os ângulos que a ceviana AD forma com os lados AB e AC, β_1, β_2 os ângulos que a ceviana BE forma com os lados BA e BC e γ_1, γ_2 os ângulos que a ceviana CF forma com os lados BC e AC. Então AD, BE, CF concorrem se, e somente se,

$$\frac{\text{sen } \alpha_1}{\text{sen } \alpha_2} \cdot \frac{\text{sen } \beta_1}{\text{sen } \beta_2} \cdot \frac{\text{sen } \gamma_1}{\text{sen } \gamma_2} = 1.$$

4 Problemas

4.1 Problemas introdutórios

1. Prove que todas as relações apresentadas são verdadeiras.

2. Calcule o seno, o cosseno e a tangente de 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, 105°, 120°, 135°, 150°, 165° e 180°.

3. Calcule o seno e o cosseno de 18°, 24°, 36°, 72°.

4. Em um triângulo ABC, $\angle A = 60^\circ$ e $\angle B = 45^\circ$. Se $BC = 4$, quanto vale AC?

5. Em um triângulo ABC, $\angle A = 60^\circ$, $AB = 3$ e $BC = 4$, quanto vale AC?

6. Calcule os valores de r, R, r_a, sen α, cos α em função dos lados a, b, c.

7. Calcule os comprimentos da altura, mediana e bissetriz relativas ao vértice A em função de $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$.

8. Sejam I, G, H, O o incentro, baricentro, ortocentro e circuncentro, respectivamente. Calcule as distâncias HG, GO, OH, IO, IG, IH em função de $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$.

9. Seja M o ponto médio do lado BC. Calcule as distâncias IM, GM, HM, OM em função de $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$.

10. As bissetrizes internas dos ângulos $\angle A$ e $\angle C$ do triângulo ABC cortam-se no ponto I. Sabe-se que $AI = BC$ e que $\angle ICA = 2\angle IAC$. Determine a medida do ângulo $\angle ABC$.

4.2 Problemas gerais

11. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência de diâmetro AD. Se $AB = BC = 1$ e $AD = 3$, determine o comprimento da corda CD.

12. Em um triângulo ABC, $\angle BAC = 100^\circ$ e $AB = AC$. Seja BD a bissetriz de $\angle ABC$, com D sobre o lado AC. Prove que $AD + BD = BC$.

13. Seja $ABCD$ inscritível com $AB = 4$, $BC = 5$, $CD = 6$ e $DA = 7$. Sejam A_1 e C_1 os pés das perpendiculares por A e C à reta BD, respectivamente, e B_1 e D_1 os pés das perpendiculares por B e D à reta AC, respectivamente. Determine o perímetro do quadrilátero $A_1B_1C_1D_1$.

14. Um círculo está inscrito no trapézio isósceles $ABCD$. Sejam K e L os pontos de interseção do círculo com AC (com K entre A e L). Encontre o valor de $\frac{AL \cdot KC}{AK \cdot LC}$.

15. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível em uma circunferência de centro O e suponha que AC seja um diâmetro. As diagonais AC e BD se intersectam em P e BO intersecta o segmento CD em Q. Sabendo que $\angle BPC = 45^\circ$ e $PB = 1 + \sqrt{3}$, determine $\frac{DQ}{CQ}$.

16. Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $\angle ABC = \angle ADC = 135^\circ$ e

$$AC^2 \cdot BD^2 = 2 \cdot AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA.$$

Prove que AC e BD são perpendiculares.

17. O triângulo ABC é tal que $\angle C = 60^\circ$ e $BC = 4$. Seja D o ponto médio de BC. Qual é o maior valor possível para a tangente do ângulo $\angle BAD$?

18. No triângulo ABC, de circunraio R, seja T o pé da bissetriz do vértice A. Prove que

$$\frac{AB \cdot AC}{AT} + \max\{AB,\ AC\} \le 4R \cdot \cos\left(\frac{\angle A}{4}\right)$$

e descubra os casos de igualdade.

19. Seja ABC um triângulo de circuncentro O e ortocentro H tal que $\angle BAC = 60^\circ$ e $AB > AC$. Sejam também BE, CF as alturas relativas aos lados CA, AB, respectivamente, e M, N pontos sobre os segmentos BH, HF, respectivamente, tais que $BM = CN$. Determino o valor da expressão $\frac{HM+HN}{HO}$.

20. Seja P um ponto interior ao triângulo ABC tal que

$$\angle APC - \angle ABC = \angle APB - \angle ACB.$$

Sejam D e E os incentros dos triângulos APB e APC, respectivamente. Prove que as retas BD, CE e AP passam por um ponto em comum.

21. Seja Γ uma circunferência de centro O tangente aos lados AB e AC do triângulo ABC nos pontos E e F. A reta perpendicular ao lado BC por O intercepta EF no ponto D. Mostre que A, D e M são colineares.

22. Seja A_1 o centro de um quadrado inscrito no triângulo acutângulo ABC com dois vértices do quadrado em BC. Assim, um dos dois vértices restantes está em AB e o outro em AC. Os pontos B_1 e C_1 são definidos de modo análogo. Prove que as retas AA_1, BB_1 e CC_1 são concorrentes.

23. Seja $ABCD$ um trapézio com $AB \parallel CD$ e inscrito na circunferência Γ. Sejam P e Q dois pontos no segmento AB (A, P, Q, B estão nessa ordem e são distintos) tais que $AP = QB$. Sejam E e F os segundos pontos de interseção das retas CP e CQ com Γ, respectivamente. As retas AB e EF intersectam-se em G. Demonstre que a reta DG é tangente a Γ.

24. Sejam ABC um triângulo acutângulo e Γ a sua circunferência circunscrita. Seja D um ponto no segmento BC, distinto de B e de C, e seja M o ponto médio de AD. A reta perpendicular a AB que passa por D intersecta AB em E e Γ em F, com o ponto D entre E e F. As retas FC e EM intersectam-se no ponto X. Se $\angle DAE = \angle AFE$, mostre que a reta AX é tangente a Γ.

25. No interior do triângulo ABC é dado um ponto M. A reta BM intersecta o lado AC em N. O ponto K é simétrico de M com relação a AC. A reta BK intersecta AC em P. Se $\angle AMP = \angle CMN$, prove que $\angle ABP = \angle CBN$.

26. Seja ABC um triângulo com circuncírculo Γ e incentro I e seja M o ponto médio de BC. Os pontos D, E, F são escolhidos nos lados BC, CA, AB tais que $ID \perp BC$, $IE \perp AI$ e $IF \perp AI$. Suponha que o circuncírculo do triângulo AEF intersecta Γ no ponto X diferente de A. Prove que as retas XD e AM se intersectam sobre Γ.