Álgebra Linear em Combinatória

Semana Olímpica 2022 - Pernambuco

Rafael Filipe - rafaelfilipedoss@gmail.com

1 Alguns fatos de Álgebra Linear

A maioria das definições nesta seção foi retirada do apêndice do livro *Álgebra Exemplar*, do Eduardo Tengan.

1.1 Espaços vetoriais

Definição 1.1.1. Um espaço vetorial sobre um corpo K é um conjunto V, munido de duas operações

$$+ : V \times V \to V \text{ (soma vetorial)}$$
$$\cdot : K \times V \to V \text{ (multiplicação escalar)}$$

tais que, para quaisquer $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in K$ e quaisquer $v, v_1, v_2 \in V$:

- $(V, +)$ é um grupo abeliano;
- $1 \cdot v_1 = v_1$;
- $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$;
- $\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$;
- $(\lambda_1 \lambda_2) \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v_1)$.

Os elementos de V são chamados *vetores* e os elementos de K são chamados *escalares*.

Definição 1.1.2. Seja V um espaço vetorial. Uma *combinação linear* dos vetores $v_1, \ldots, v_n \in V$ é um elemento da forma $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \in V$, com $\lambda_i \in K$.

Definição 1.1.3. Um subconjunto $U \subseteq V$ é um subespaço de V se $U \neq \emptyset$ e U é fechado por combinações lineares.

Definição 1.1.4. Dado $X \subseteq V$, denotamos por $\langle X \rangle$ o *subespaço gerado* por X, isto é, o subespaço de V formado por todas as combinações lineares (finitas) de elementos de X. Note que $\langle X \rangle$ é o menor subespaço vetorial que contém X.

Definição 1.1.5. Um conjunto $X \subseteq V$ é dito *linearmente independente* (LI) se a única combinação linear de elementos em X que é igual a $0 \in V$ é a trivial, ou seja,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0 \iff \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Definição 1.1.6. Um conjunto $X \subseteq V$ é uma base do espaço vetorial V se X é linearmente independente e $\langle X \rangle = V$.

Teorema 1.1.7. Se B_1 e B_2 são bases de um mesmo K-espaço vetorial V, então B_1 e B_2 tem a mesma cardinalidade. Definimos a *dimensão* de V (denotada por dim$V$ ou dim$_K V$) como a cardinalidade de qualquer base.

Observação: Se um espaço vetorial é finitamente gerado, ou seja $V = \langle X \rangle$ é fácil verificar que existe base para V. No caso geral, a existência de uma base é equivalente ao axioma da escolha. Assim, em essência, a existência de alguma base é um axioma.

1.2 Transformações lineares

Definição 1.2.8. Sejam U e V dois K-espaços vetoriais. Uma função $T : U \to V$ é chamada uma transformação linear se ela preserva combinações lineares, isto é, se $u_1, u_2 \in U, v_1, v_2 \in V$, então

$$T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2).$$

Um *isomorfismo* de espaços vetoriais é uma transformação linear bijetora. Neste caso, pode-se mostrar que a inversa também é uma transformação linear.

Teorema 1.2.9. Dois espaços vetoriais são isomorfos se, e somente se, possuem a mesma dimensão.

Definição 1.2.10. Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Definimos o *kernel* ou *núcleo* de T como o subespaço de U

$$\ker T := T^{-1}(0) = \{u \in U \mid T(u) = 0\}.$$

Lema 1.2.11. Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Temos que

$$T \text{ é injetora} \iff \ker T = 0.$$

Em particular, se U e V são espaços vetoriais de mesma dimensão finita, T é um isomorfismo se, e só se $\ker T = 0$.

Teorema 1.2.12. (núcleo-imagem) Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Então

$$\dim(U) = \dim \ker(T) + \dim \operatorname{im}(T).$$

Definição 1.2.13. Sejam U e V espaços vetoriais sobre K com $\dim(U) = n$ e $\dim(V) = m$ (finitos) e sejam $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e $C = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ bases de U e V, respectivamente. Sendo $T : U \to V$ uma transformação linear, podemos escrever $T(u_i)$ em coordenadas em relação à base C:

$$T(u_i) = a_{1i}v_1 + a_{2i}v_2 + \ldots + a_{mi}.$$

Com isso, sendo $z = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n v_n$, podemos escrever

$$[T(z)]_C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

A matriz $[T]_{B,C} = (a_{ij})$ acima é *chamada de matriz de* T *relativa às bases* B *e* C. Note que as colunas da matriz são as imagens dos elementos da base B.

1.3 Posto

Definição 1.3.14. O *posto-linha* de A é é a dimensão do subespaço de K^n gerado pelos vetores linhas da matriz A. Analogamento, defnimos o *posto-coluna* como a dimensão do subespaço de K^m gerado pelos vetores coluna de A. Em inglês chamamos posto de *rank*.

Observação: Note que $\mathrm{rank}(T)$ é a dimensão da imagem da transformação que tem T como matriz.

Teorema 1.3.15. Seja $A \in M_{m\times n}(K)$. O posto-linha de A é igual ao posto-coluna de A.

Teorema 1.3.16. Sejam $A, A' \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{n\times k}(K)$ e $C \in M_{\ell\times m}(K)$. Valem as seguintes propriedades:

- $\mathrm{rank}(A + A') \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(A')$;
- $\mathrm{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$;
- $\mathrm{rank}(AB) \leq \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$;
- Se $\mathrm{rank}(B) = n$, então $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(A)$;
- Se Se $\mathrm{rank}(C) = m$, então $\mathrm{rank}(CA) = \mathrm{rank}(A)$.

1.4 Determinante e sistemas lineares

Teorema 1.4.17. Sejam $A, B \in M_n(K)$. Então

- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$;
- Se A é inversível, então $\det(A) \neq 0$ e A é chamada não-singular (se $\det(A) = 0$, dizemos que A é singular);
- $\det(A^t) = \det(A)$;
- Determinantes são invariantes se somarmos a uma fila uma combinação linear de outras filas.

Teorema 1.4.18. Seja A uma matriz quadrada e $A \cdot x = b$ um sistema linear. Se $\det(A) \neq 0$, então o sistema possui uma única solução.

Teorema 1.4.19. Seja $A \cdot x = 0$ um sistema linear. Se A possui mais colunas do que linhas, então $Ax = 0$ tem solução não nula.

2 Problemas

2.1 Vetores característicos, produto escalar e independência

Problema 2.1.1. (Oddtown) Uma cidade possui uma população de n habitantes que adoram formar diferentes clubes. Para limitar o número de clubes, o prefeito da cidade adotou as seguintes regras:

- Todo clube deve ter um número ímpar de membros;
- Quaisquer dois clubes devem ter um número par de membros em comum.

Qual é a quantidade máxima de clubes que pode ser formada?

Problema 2.1.2. (IMO 1998) Num concurso há m candidatos e n juízes, onde $n \geq 3$ é ímpar. Cada candidato é avaliado por cada juiz, podendo ser aprovado ou reprovado. Sabe-se que os julgamentos de cada par de juízes coincidem em no máximo k candidatos. Prove que:

$$\frac{k}{m} \geq \frac{n-1}{2n}.$$

Problema 2.1.3. (China 2002) Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ subconjuntos não vazios de $[n]$. Prove que existem subconjuntos não vazios $I, J \subseteq [n+1]$ tais que

$$\bigcup_{k \in I} A_k = \bigcup_{k \in J} A_k.$$

Problema 2.1.4. (Rússia 2001) Alguns estudantes participam de uma competição composta por n problemas. Cada problema vale um número positivo de pontos, determinado pelo juri. Um estudante tira 0 pontos por uma resposta errada, e todos os pontos por uma resposta correta. Ao final da competição, notou-se que o júri poderia impor valores para os problemas, de modo a obter qualquer classificação final (estrita) dos concorrentes. Encontre o maior número possível de concorrentes.

Problema 2.1.5. (IMC 2015) Sejam $n \geq 2$ e $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ pontos em $\mathbb{R}^n$, que não estão no mesmo hiperplano e seja B um ponto estritamente no interior do fecho convexo de $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. Prove que a desigualdade $\angle A_i B A_j > 90°$ é verdadeira para para pelo menos n pares (i, j) com $1 \leq i < j \leq n+1$.

2.2 Núcleo e imagem

Proposição 2.2.6. Sejam J_m uma matriz $m \times m$ com 1 em todas as entradas e I_m a matriz identidade $m \times m$. Considere a martriz $J_m - I_m$. Então

- $\operatorname{rank}(J_m - I_m) = m$ em $\mathbb{F}_2$ se m é par;
- $\operatorname{rank}(J_m - I_m) = m - 1$ em $\mathbb{F}_2$ se m é ímpar.

Problema 2.2.7. Seja n um inteiro positivo ímpar. Há n pedras numa mesa com a seguinte propriedade: se qualquer pedra for removida, as pedras restantes podem ser particionadas em dois grupos com mesmo tamanho e peso. Prove que todas as pedras possuem o mesmo peso.

Problema 2.2.8. Há $2n$ pessoas em uma festa, e cada pessoa tem uma quantidade par de amigos na festa (amizade é recíproca). Prove que existem duas pessoas na festa cuja quantidade de amigos em comum é par.

Problema 2.2.9. Em um grafo G com n vértices, quaisquer dois vértices possui um número ímpar de vizinhos em comum. Mostre que n é ímpar.

Problema 2.2.10. (Eventown) Uma cidade possui uma população de n habitantes que adoram formar diferentes clubes. Para limitar o número de clubes, o prefeito da cidade adotou as seguintes regras:

- Todo clube deve ter um número par de membros;
- Dois clubes não podem possuir exatamente os mesmos membros;
- Quaisquer dois clubes devem ter um número par de membros em comum.

Qual é a quantidade máxima de clubes que pode ser formada?

Problema 2.2.11. Um conjunto T é chamado par se ele possui um número par de elementos. Seja n um inteiro positivo par, e S_1, S_2, ..., S_n subconjuntos pares de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Prove que existem $i \neq j$ tais que $S_i \cap S_j$ é par.

2.3 Famílias intersectantes e block-designs

Definição 2.3.12. (block designs) Seja $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de S é um (n, k, λ)-*design* se $2 \leq k < n$, cada conjunto de $\mathcal{F}$ tem k elementos e cada par de elementos de S está contido em exatamente λ dos conjuntos $\mathcal{F}$. Os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados *blocos*.

Problema 2.3.13. Seja b a quantidade de conjuntos no (n, k, λ)-design $\mathcal{F}$. Então cada elemento de S pertence a r blocos, sendo $r(k-1) = \lambda(n-1)$. Além disso, $bk = nr$.

Lema 2.3.14. Seja A uma matriz quadrada com entradas reais, para os quais todas as entradas fora da diagonal são iguais a um $t \geq 0$, e todos os termos da diagonal são estritamente maiores que t. Então A é não-singular.

Problema 2.3.15. Seja $\mathcal{F}$ uma coleção de subconjuntos próprios distintos de um conjunto finito X. Suponha que para quaisquer dois elementos distintos de X existe um único elemento em $\mathcal{F}$ que contém os dois elementos. Prove que $|\mathcal{F}| \geq |X|$.

Teorema 2.3.16. (Fisher) Seja $\mathcal{C}$ um (n, k, λ)-design. Então $|\mathcal{C}| \leq n$.

Problema 2.3.17. (Moldávia) Existem 22 círculos e 22 pontos no plano tais que cada círculo contém pelo menos 7 pontos e cada ponto pertence a no máximo 7 círculos?

2.4 Sistemas lineares

Problema 2.4.18. Temos n moedas de massas desconhecidas e uma balança. Podemos colocar algumas das moedas em um lado da balança e um número igual de moedas no outro lado. Depois de distribuir as moedas, a balança compara a massa total de cada lado, indicando que as duas massas são iguais ou indicando que um determinado lado é o mais pesado dos dois. Mostre que é necessário pelo menos $n-1$ comparações para determinar se todas as moedas possuem mesma massa.

Problema 2.4.19. Um K_n é particionado em m subgrafos bipartidos completos. Prove que $m \geq n - 1$.

Problema 2.4.20. É dado um tabuleiro 6×6 em que cada casa é inicialmente pintada de preto ou branco. Você pode escolher qualquer quadrado $t \times t$, com $2 \leq t \leq 6$, e inverter todas as cores das casas desse quadrado. Essa operação pode ser repetida quantas vezes você quiser. É sempre possível deixar todas as casas pretas?

Problema 2.4.21. (Rússia 1997) Um cubo $n \times n \times n$ é dividido em cubos unitários. Nos é dado um polígono fechado sem autointerseção (no espaço), cada um de seus lados une os centros de dois cubos unitários que compartilham uma face comum. Diz-se que as faces dos cubos unitários que interceptam o polígono são *distinguidas*. Prove que as arestas dos cubos unitários podem ser coloridas em duas cores, de modo que cada face distinguida tenha um número ímpar de arestas de cada cor, enquanto cada face indistinguida tenha um número par de arestas de cada cor.

Problema 2.4.22. (Cone Sul TST 2021) Há n cartões dentro de uma caixa. Cada um desses cartões possui duas faces: uma preta e uma branca. Ana e Beto jogam o seguinte jogo: Ana coloca os n cartões em fila (em alguns dos cartões a face de cima será preta e em outros a face de cima será branca). Após isso, Beto pode realizar movimentos, não mais do que n vezes: ele escolhe um cartão, virando-o e virando o(s) seu(s) cartão(ões) vizinho(s) (se inicialmente a face de cima é preta, ele vira para a face branca e vice-versa). Beto ganha o jogo se ele conseguir que todos os cartões fiquem com as faces brancas para cima, caso contrário, Ana ganha o jogo. Algum dos dois jogadores possui uma estratégia vencedora? Em caso afirmativo, descreve essa estratégia. Os cartões do início e do fim da fila possuem 1 cartão vizinho e os demais cartões possuem 2 cartões vizinhos.

Problema 2.4.23. (OBM 2020) Sejam n e k inteiros positivos com $k \leq n$. Em um grupo de n pessoas, cada uma ou sempre fala a verdade ou sempre mente. Arnaldo pode fazer perguntas para quaisquer dessas pessoas desde que essas perguntas sejam do tipo: "No conjunto A, qual a paridade de pessoas que falam de verdade?", onde A é um subconjunto de tamanho k do conjunto das n pessoas. A resposta só pode ser "par" ou "ímpar".

a) Para quais valores de n e k é possível determinar quais pessoas falam a verdade e quais pessoas sempre mentem?

b) Qual o número mínimo de perguntas necessárias para determinar quais pessoas falam a verdade e quais pessoas sempre mentem, quando esse número é finito?

Problema 2.4.24. (Irã TST 1996) Suponha que cada vértice de um grafo tem um botão e uma lâmpada. Ao apertar o botão de um vértice, trocam-se o estado da lâmpada do vértice e das lâmpadas de seus vizinhos. As lâmpadas estão inicialmente todas apagadas. Prove que é possível deixar todas as lâmpadas acesas.

Problema 2.4.25. (Bulgária TST 2004) Prove que entre $2n + 1$ irracionais existem $n + 1$ tais que a soma de quaisquer k deles, $1 \leq k \leq n + 1$, é irracional.

Problema 2.4.26. (USAMO 2008) Em uma certa conferência matemática, cada par de matemáticos são amigos ou estranhos. Na hora das refeições, cada participante come em uma das duas grandes salas de jantar. Cada matemático insiste em comer em uma sala que contém um número par de seus amigos. Prove que o número de maneiras que os matemáticos podem ser divididos entre as duas salas é uma potência de dois.

Problema 2.4.27. (CIIM 2018) Sejam $p(x)$ e $q(x)$ polinômios reais não constantes de grau no máximo n ($n > 1$). Mostre que existe um polinômio não nulo $F(x, y)$ em duas variáveis com coeficientes reais de grau no máximo $2n - 2$, tal que $F(p(t), q(t)) = 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Problema 2.4.28. (IMO SL 2020) Um mágico pretende realizar o seguinte truque. Ela anuncia um inteiro positivo n, junto com $2n$ números reais $x_1 < \cdots < x_{2n}$, para o público. Um membro da plateia então escolhe secretamente um polinômio $P(x)$ de grau n com coeficientes reais, calcula os $2n$ valores $P(x_1), \ldots, P(x_{2n})$, e anota esses $2n$ valores no quadro-negro em ordem não-decrescente. Depois disso, o mágico anuncia o polinômio secreto para o público. O mágico pode encontrar uma estratégia para realizar tal truque?