Funções Geratrizes

Prof.Luciano Monteiro de Castro
lucianogmcastro@gmail.com

1 Introdução

Definição 1.1. Dada uma sequência $(a_k)_{k=0}^{\infty}$, sua *função geratriz* $F(x)$ é definida como a série de potências

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots .$$

Nossa preferência é seguir a tendência dos textos mais modernos e considerar a série acima como série formal, ou seja, considerando x uma indeterminada (variável livre) e sem preocupações com convergência. As operações algébricas com séries formais podem ser definidas de maneira similar ao que se faz com polinômios. O aluno interessado pode aprender mais sobre o tema, por exemplo, no seguinte artigo:

`https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/IvanNiven.pdf`

Em nosso estudo, os termos da sequência $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ serão números reais (ou complexos), mas o conceito pode ser naturalmente ampliado para outros conjuntos.

Funções geratrizes são uma ferramenta extraordinária para resolução de problemas em diversas áreas da Matemática. O conceito é algébrico (série formal), mas pode facilmente tornar-se analítico (considerando x um número real ou complexo e a série como limite de uma soma) e surge no estudo de fenômenos discretos (problemas de contagem, probabilidade, recorrências, etc). Os limites para sua utilidade parecem estar definidos apenas pela criatividade do matemático.
O seguinte parágrafo, extraído do livro "Concrete Mathematics", resume brilhantemente a importância desta ferramenta:

> "Uma função geratriz é útil porque é um único objeto que representa integralmente uma sequência infinita. Muitas vezes podemos resolver problemas considerando uma ou mais funções geratrizes, depois mexendo, brincando com essas funções até que saibamos bastante sobre elas, e finalmente olhando de novo para os coeficientes. Com um pouquinho de sorte, saberemos o suficiente sobre a função para entender o que precisamos saber sobre os seus coeficientes."

2 Algumas Séries de Potências Úteis

2.1 Série Geométrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad \frac{1}{1-qx} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k x^k.$$

2.2 Binômio de Newton Generalizado

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k.$$

Aqui, r pode ser qualquer número real, bastando definir $\binom{r}{k}$ como $\frac{r^{\underline{k}}}{k!}$. A demonstração é uma aplicação direta do teorema de Taylor.

2.3 Exponencial

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

2.4 Um exemplo: Fibonacci (de novo!)

Vamos deduzir outra vez a fórmula para o termo geral da sequência de Fibonacci, definida por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (para $n \leq 2$), agora utilizando funções geratrizes. O lado esquerdo da equação de recorrência já é o coeficiente do termo de grau n da função geratriz $F(x)$ da sequência, logo o primeiro passo para descobrir algo sobre $F(x)$ é multiplicar a equação por x^n:

$$F_n x^n = F_{n-1} x^n + F_{n-2} x^n.$$

O próximo passo é somar em n para obter $F(x)$ do lado esquerdo, e algo parecido do lado direito, após manipularmos os expoentes de x. Mas há uma dificuldade: a equação é válida apenas a partir de $n = 2$, por isso temos que ser cuidadosos:

$$F(x) - F_1 x - F_0 = \sum_{n \geq 2} F_n x^n = \sum_{n \geq 2} F_{n-1} x^n + \sum_{n \geq 2} F_{n-2} x^n =$$

$$= x \sum_{n \geq 2} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n \geq 2} F_{n-2} x^{n-2} = x(F(x) - F_0) + x^2 F(x).$$

Substituindo os valores de F_0 e F_1 e resolvendo a equação em $F(x)$ obtemos

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Esta expressão guarda toda a informação sobre a sequência de Fibonacci, agora só precisamos extraí-la; ou seja, precisamos expandir $\frac{x}{1-x-x^2}$ em série de potências. A forma mais eficiente de fazê-lo é fatorar o denominador em fatores do primeiro grau da forma $(1 - qx)$, separar em frações parciais e então utilizar a fórmula da série geométrica. Para isso calculamos os inversos das raízes do polinômio $1 - x - x^2$, que são as raízes de $x^2 - x - 1$: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\overline{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Obtemos

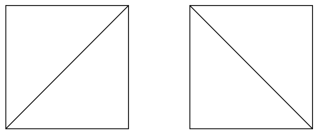
$$F(x) = \frac{x}{(1 - \varphi x)(1 - \overline{\varphi} x)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \varphi x} - \frac{1}{1 - \overline{\varphi} x} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{k=0}^{n} \varphi^k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\varphi}^k x^k \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^k - \overline{\varphi}^k \right) x^k.$$

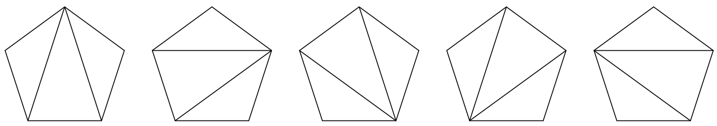
Assim, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - \overline{\varphi}^n)$.

3 Problemas

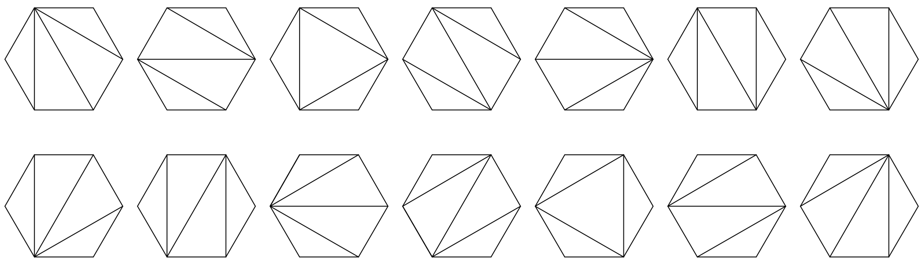
1. Para cada inteiro positivo $n \geq 4$, determine o número de maneiras diferentes de dividir um polígono convexo de n lados em triângulos, traçando apenas diagonais que não se intersectem no interior do polígono. As figuras a seguir resolvem o problema para $n \in \{4, 5, 6\}$.



(a) $n = 4$



(b) $n = 5$



(c) $n = 6$

2. Resolva as seguintes equações de recorrência usando funções geratrizes.

(a) $x_0 = 2$, $x_1 = 7$, e $x_{n+1} = 7x_n - 12x_{n-1}$, para $n \geq 1$;

(b) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, e $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$, para $n \geq 1$;

(c) $b_0 = -1$, $b_1 = 5$, e $b_{n+1} = 5b_n - 6b_{n-1} + 1$, para $n \geq 1$;

(d) $c_0 = 3$, $c_1 = 2$, e $c_{n+1} = 5c_n - 6c_{n-1} + n$, para $n \geq 1$;

(e) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 1$ e $u_n = u_{n-1} + 4u_{n-2} - 4u_{n-3}$, para $n \geq 3$.

3. Calcule as somas a seguir usando funções geratrizes.

(a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n$

(b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

(c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

(d) $\sum_{k=0}^{n-1} kx^{k-1}$, $\sum_{k=0}^{n-1} k(k-1)x^{k-2}$, e $\sum_{k=0}^{n-1} k^2x^k$.

(e) $\sum_{k=0}^{n-1} \left(k^2 - 5k + 6\right) 3^k$.

4. Calcule $\sum_{k=0}^{n} F_k F_{n-k}$. ($(F_k)$ representa a sequência de Fibonacci).

5. Calcule $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2$.

6. Let n be a positive integer. Compute the number of words w (finite sequences of letters) that satisfy all the following three properties:

(1) w consists of n letters, all of them are from the alphabet $\{a, b, c, d\}$;

(2) w contains an even number of letters a;

(3) w contains an even number of letters b.

(For example, for $n = 2$ there are 6 such words: aa, bb, cc, dd, cd and dc.)

7. Para cada subconjunto A de $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, seja $p(A)$ o produto de seus elementos. Por convenção, adotamos $p(\emptyset) = 1$. Calcule $\sum_{A \subset I_n} p(A)$.

8. Resolva a recorrência $g_0 = 1$, $g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + \cdots ng_0$ (para $n > 0$).

9. Prove que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{n-k} = F_{2n}.$$

((F_k) representa a sequência de Fibonacci).

10. Seja n um inteiro positivo. Encontre o número de polinômios com coeficientes em $\{0, 1, 2, 3\}$ tais que $P(2) = n$.

11. Dado o natural n, calcule $\sum_k \binom{2k}{k}\binom{n}{k}(-1)^k 2^{-k}$.

12. Seja p um primo ímpar. Quantos subconjuntos com p elementos de $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ têm soma dos elementos múltipla de p?

13. Sir Alex plays the following game on a row of 9 cells. Initially, all cells are empty. In each move, Sir Alex is allowed to perform exactly one of the following two operations:

(1) Choose any number of the form 2^j, where j is a non-negative integer, and put it into an empty cell.

(2) Choose two (not necessarily adjacent) cells with the same number in them; denote that number by 2^j. Replace the number in one of the cells with 2^{j+1} and erase the number in the other cell.

At the end of the game, one cell contains the number 2^n, where n is a given positive integer, while the other cells are empty. Determine the maximum number of moves that Sir Alex could have made, in terms of n.

14. Seja $p > 3$ um número primo. Para cada subconjunto $T \subset \{0, 1, 2, 3, \ldots, p-1\}$, $T \neq \emptyset$, seja $E(T)$ o conjunto de todas as $(p-1)$-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$ tais que cada x_i pertence a T e $x_1 + 2x_2 + \cdots + (p-1)x_{p-1}$ é divisível por p. Prove que $|E(\{0, 1, 3\})| \geq |E(\{0, 1, 2\})|$, com igualdade se, e somente se, $p = 5$.

15. Define the sequence $a_0, a_1, \ldots$ of numbers by the following recurrence:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad (n+3)a_{n+2} = (6n+9)a_{n+1} - na_n \quad \text{for } n \geq 0.$$

Prove that all terms of this sequence are integers.