25^a **Semana Olímpica - Cabo de Santo Agostinho - PE.**
20 a 24 de julho de 2022.

Prof. Carlos Gomes - DMAT UFRN.
cgomesmat@gmail.com

Dr. Trig: Salvo pela trigonometria e pelos complexos! - Nível 3.

---

1 Introdução

Tradicionalmente os capítulos destinados a Trigonometria e aos Números complexos são recheados com exercícios e problemas que abordam esses assuntos de uma maneira fechada em si. No máximo o que ocorre é revelar uma conexão entre esses dois temas quando é introduzida a forma trigonométrica (ou polar) de um número complexo e as conhecidas fórmulas de Moivre para a multiplicç so, divisão e potenciação de números complexos. A nossa propostas aqui é mostrar que esses dois temas que aparentemente são fechados em si, na verdade podem apresentar-se como ferramentas bastante adequadas para resolver muitos problemas de natureza algébrica ou geomética.

2 Algumas fórmulas trigonométricas

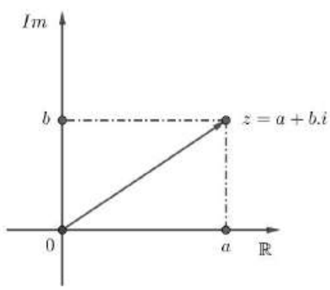
A seguir listamos algumas identidades trigonométricas que serão bastante úteis na resolução dos problemas resolvidos (e propostos) ao longo deste texto.

- $cos(-x) = cosx$ e $sen(-x) = -sen(x)$.
- $sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cosx$ e $cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = senx$.
- $sen(\pi - x) = senx$ e $cos(\pi - x) = -cosx$.
- $sen^2x + cos^2x = 1$.
- $sen(x \pm y) = senxcosy \pm senycosx$.
- $cos(x \pm y) = cosxcosy \mp senxseny$.
- $sen(2x) = 2senxcosx$.
- $cos(2x) = \begin{cases} cos^2x - sen^2x \\ 2cos^2x - 1 \\ 1 - 2sen^2x \end{cases}$.
- $sen(3x) = 3senx - 4sn^3x$.
- $cos(3x) = 4cos^3x - 3cosx$.
- $tan(2x) = \frac{2tanx}{1-tan^2x}$.
- $tan(3x) = \frac{3tanx-tan^3x}{1-3tan^2x}$.
- $senx = \frac{2tan\frac{x}{2}}{1+tan^2\frac{x}{2}}$.
- $cosx = \frac{1-tan^2\frac{x}{2}}{1+tan^2\frac{x}{2}}$.
- Se $x, y, z \in \mathbb{R}$ são tais que $x + y + z = \pi$, então
$$tanx + tany + tanz = tanx.tany.tanz.$$
- Se $x, y, z \in \mathbb{R}$ são tais que $x + y + z = \pi$, então
$$tan\frac{x}{2}.tan\frac{y}{2} + tan\frac{x}{2}.tan\frac{z}{2} + tan\frac{y}{2}.tan\frac{z}{2} = 1.$$

3 Números complexos

Nesta seção vamos resumir os principais fatos sobre os números complexos, alguns problemas interessantes sobre o tema e também vamos mostrar o quanto podem ser úteis para resolver problemas de diversos temas da Matemática. Ao contrário do que muitos pensam, os números complexos não surgiram com as equações polinomiais do 2^o grau, como por exemplo, $x^2 + 1 = 0$. Na verdade a origem dos números complexos está vinculada à história da busca de uma fórmula para resolver as equações do 3^o grau.

Definição. 3.1. *Um número complexo é um objeto da forma $z = a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$ (i é chamado de unidade imaginária dos números complexos). dizemos que $z = a + bi$ é a forma algébrica do números complexo z* Temos então o conjunto $\mathbb{C} = \left\{ z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \right\}$ é chamado de conjunto dos números complexos. No número complexo $z = a + bi$, dizemos que o a é a **parte real** de z e o b é a **parte imaginária** de z. Representamos essses fatos por $Re(z) = a$ e $Im(z) = b$.
Note que os números complexos com parte imaginária nula são números reais, o que revela que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Por outro lado os números complexos em que a parte real é nula, i.e., $z = bi$, são chamados de **imaginários puros**. Gometricamente, constuma-se representar os números complexos num sistema de coordenadas ortogonais, onde o eixo horizontal representa o eixo real (onde representamos a parte real de um número complexo) e o eixo vertical representa o eixo imaginário (onde representamos a parte imaginária de um número complexo). Esse sistema de coordenadas é chamado de *Plano de Argand-Gauss*, conformr ilustra a figura abaixo:



Um outro fato importante é que as potências inteiras de i são cíclicas módulo 4, isto é, repetem seus valores de 4 em 4. De fato,

$$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = i^2.i = (-1).i = -i, i^4 = i^2.i^2 = (-1)(-1) = 1, \cdots$$

Para um inteiro n temos que $n = 4q + r$, onde $r = 0, 1, 2, 3$. Assim,

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q}.i^r = (i^4)^q.i^r = 1^q.i^r = i^r.$$

Definição. 3.2 (Igualdade)**.** *Dizemos que dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$ são iguais quando $a = c$ e $b = d$, isto é,*

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d.$$

3.1 Operações com números complexos

Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, definimos as seguintes operações:

- Adição

  $z + w = (a + c) + (b + d)i.$

- Subtração

  $z - w = (a - c) + (b - d)i.$

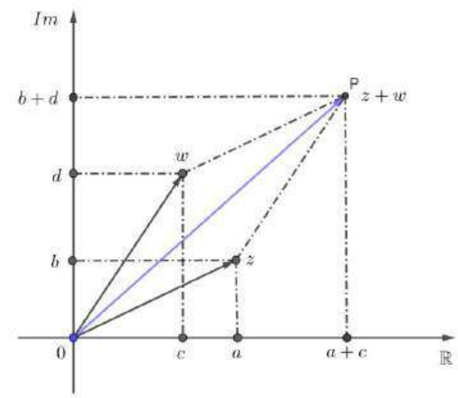
- Multiplicação

$$\begin{aligned} z.w &= (a + bi)(c + di) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}.$$

- Divisão

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{a + bi}{c + di} \\ &= \frac{(a + bi)}{(c + di)} \frac{(c - di)}{(c - di)} \\ &= \frac{(ac + bd) - (ad - bc).i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \frac{ad - bc}{c^2 + d^2}.i \end{aligned}.$$

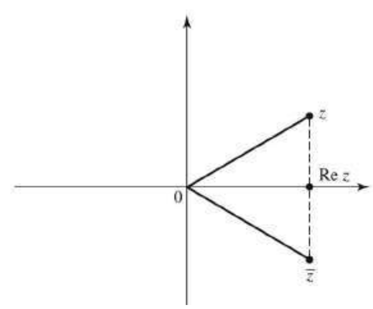
Geometricamente, a soma de dois números complexos z e w é representado por uma diagonal do paralelogramo cujos lados são os números complexos z e w, conforme ilustra a figura abaixo:



A outra diagonal do mesmo paralelogramo representa a diferença $w - z$.

Definição. 3.3 (Conjugado)**.** *Dado um números complexo $z = a + bi$, chamamos de conjugado de z o número complexo $\bar{z} = a - bi$.*

Perceba que as representações geométricas de z e do seu conjugado $\bar{z}$ são simétricas em relação ao eixo real conforme ilustra a figura abaixo:



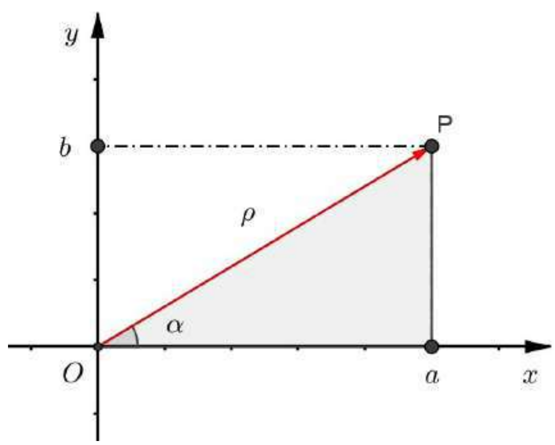
Note que a conjugação complexa goza das seguintes propriedades:

- $\bar{\bar{z}} = z, \ \forall z \in \mathbb{C}.$
- $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \overline{w}, \ \forall z, w \in \mathbb{C}.$

- $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w},\ \forall z, w \in \mathbb{C}$.
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}},\ \forall z, w \in \mathbb{C}$, com $w \neq 0$.
- $(\overline{z})^k = \overline{z^k},\ \forall z \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{Z}$.
- $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ e $Im(z) = \frac{z+\overline{z}}{2i}$.

3.2 Forma polar (ou trigonométrica)

Como já vimos, todo número complexo $z = a + bi$ pode ser representado geometricamente num sistema de coordenadas ortogonais, onde o eixo horizontal é chamado de eixo real e o eixo vertical é chamado de eixo imaginário, conforme ilusta a figura a seguir:



Um plano munido desse sistema de coordenadas ortogonais é chamado de **Plano de Argand-Gauss** e o ponto P cujas coordenadas são (a, b) é chamado de **Afixo de** z. Na figura acima, o comprimento do vetor $\overrightarrow{OP}$ é representado por ρ (ou $|z|$) é chamado de **módulo** do números complexo z. Pelo Teorema de Pitágoras, segue que

$$\rho^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Além disso, quando $z \neq 0$, o ângulo que o vetor $\overrightarrow{OP}$ forma com o eixo horizontal, é chamado de **argumento principal** , e sua medida representado por $\alpha = arg(z)$, com $-\pi \leq \alpha < \pi$ (note que se α é o argumento principal de z, então $\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ também é um argumento de de z). Ainda na figura acima, temos que:

$$cos\alpha = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho.cos\alpha.$$

$$sen\alpha = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho.sen\alpha.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a},\ \text{quando } a \neq 0.$$

Assim,

$$z = a + bi = \rho.cos\alpha + i.\rho.sen\alpha \Rightarrow z = \rho.\left(cos\alpha + i.sen\alpha\right),$$

que é a chamada **forma polar (ou trigonomética)** do número complexo z.

Proposição. 1. *Se z_1 e z_2 são números complexos, então:*

(a) $|z_1| = |\bar{z_1}|$.

(b) $|z|^2 = z\bar{z}$.

(c) $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$

(d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, *se* $z_2 \neq 0$.

(e) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

(f) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

(g) $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2|\cos\theta$, *onde θ é a medida do menor ângulo entre eles.*

3.3 Fórmulas de Moivre

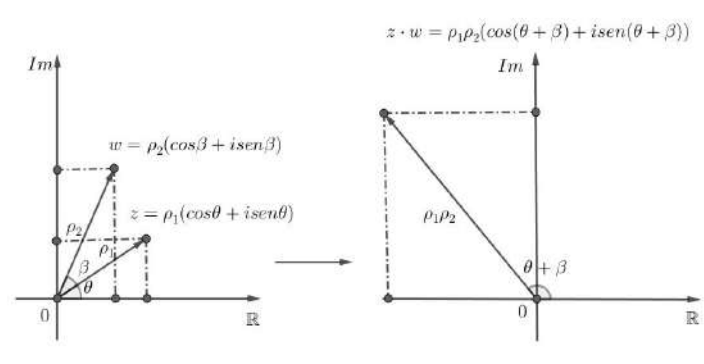
Dados dois números complexos na forma polar $z = \rho_1.\left(cos\alpha_1 + i.sen\alpha_1\right)$ e $w = \rho_2.\left(cos\alpha_2 + i.sen\alpha_2\right)$ são números complexos não nulos, as operação de multiplicação e divisão podem ser feitas de acordo com o resultado do teorema a seguir.

Teorema. 1 (Moivre)**.** *Dados os números complexos $z = \rho_1.\left(cos\alpha_1 + i.sen\alpha_1\right)$ e $w = \rho_2.\left(cos\alpha_2 + i.sen\alpha_2\right)$, então*

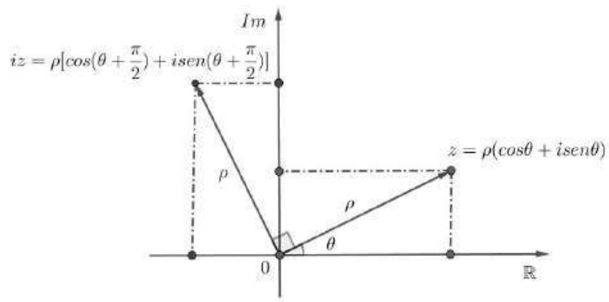
$$z.w = \rho_1.\rho_2\left[cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i.sen(\alpha_1 + \alpha_2)\right].$$

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i.sen(\alpha_1 - \alpha_2)\right].$$

[Interpretação geométrica das fórmulas de Moivre] Quando multiplicamos o número complexo $w = \rho_2(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta)$ por $z = \rho_1(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$, obtemos o nümmero complexo $z \cdot w = \rho_1\rho_2(\cos(\beta+\theta) + i\operatorname{sen}(\beta+\theta))$. Geometricamente, isso significa que ao multiplicarmos w por z o seu módulo fica multiplicado pelo módulo de z e sofre uma rotação no sentido anti-horário igual de um ângulo igual ao argumento de z.

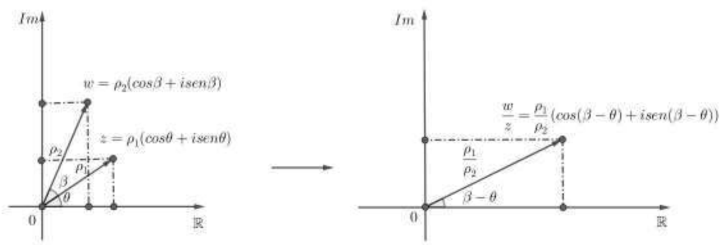


Em particular de um número complexo z pela unidade imeginária i, o número complexo iz é obtido a partir de z por uma rotação de 90^o no sentido anti-horário, conforme ilustra a figura a seguir:



No caso da divisão, $\frac{w}{z} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos\left(\beta - \theta\right) + i \operatorname{sen}\left(\beta - \theta\right)\right]$, perceba que ao dividirmos w por z obtemos,

$$\frac{w}{z} = \frac{\rho_2}{\rho_1}\left[\cos(\beta - \theta) + i \operatorname{sen}\left(\beta - \alpha\right)\right.$$



ou seja, quando dividimos w por z obtemos um novo número complexo cujo módulo é a razão entre ps módulos de w e z, respectivamente e provoca me w uma rotação de um ângulo θ no sentido horário.

Corolário. 1. *Se* $z = \rho.\left(cos\alpha + i.sen\alpha\right) \neq 0$ *e* $k \in \mathbb{Q}$*, então*

$$z^k = \rho^k.\left[cos(k.\alpha) + i.sen(k.\alpha)\right].$$

3.4 Forma exponencial de um número complexo

Neste ponto vamos apresentar uma outra importante maneira de apresentar um número complexo: a sua forma exponencial. A ideia original foi devida ao famoso matemático suíço Leonard Euler. Essa forma é motivada pelos desenvolvimentos em séreis de potências das funções seno, cosseno e exponencial (de base e), que são estudadas nos cursos de Cálculo diferencial, a saber:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

É um fato conhecido que as igualdades acima ocorrem para todo $x \in \mathbb{R}$, mas não sabemos se são válidas quando $x \in \mathbb{C}$. "Fechando os olhos"para esse fato de não sabermos se as igualdades acima funcionam ou não no caso em que $x \in \mathbb{C}$ e aplicando-as para $x = i\theta$, onde $\theta \in \mathbb{R}$ e $i^2 = 1-$, Euler tentou ver o que ocorre:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \ldots + i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \ldots) \\ &= \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

ou seja, para supondo que as igualdades dadas nas séries de potências acima também fossem verdadeiras para qualquer $x \in \mathbb{C}$, chegarímos a identidade:

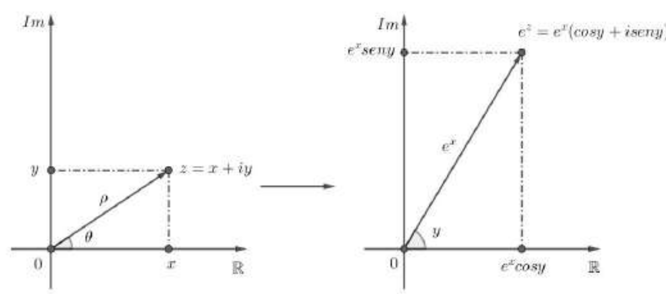
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta, \text{ com } \theta \in \mathbb{R}.$$

Motivado por essa igualdade, Euler fez a seguinte definição:

Definição. 3.4 (Euler)**.** *Para* $z = i\theta \in \mathbb{C}$*, definimos* $e^{i\theta} := \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ *(fórmula de Euler). Além disso, se* $z = x + iy \in \mathbb{C}$*, definimos*

$$e^z := e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

A figura abaixo mostra as representações geométricas dos números complexos $z = x + iy$ e e^z.



Teorema. 2. *Todo número complexo não nulo* z *de módulo* ρ *e argumento* θ *pede ser escrito na forma* $z = \rho e^{i\theta}$*, chamada de* **forma exponencial** *do complexo* z*.*

De fato, todo número complexo $z \neq 0$ pode ser escrito na forma polar:

$$z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

Ora, como $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, segue que

$$\begin{aligned} z &= \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \\ &= \rho e^{i\theta}. \end{aligned}$$

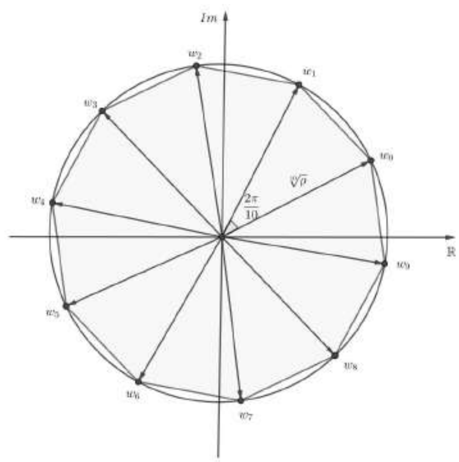
4 Radiciação de números complexos

Dados um números complexo z e um inteiro positivo $n > 1$ queremos obter um número complexo w tal que $w^n = z$. Nesse caso, dizemos que o número complexo w é a raiz $n-$ésima de z. O método para achar w está explicitado no teorema a seguir.

Teorema. 3. *Dados um número complexo (não nulo)* $z = \rho.\left(cos\alpha + i.sen\alpha\right)$ *e um inteiro positivo* $n > 1$*, temos que:*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left[cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i.sen\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right], \; k = 0, \cdots, n-1.$$

Perceba que todas as raízes n-ésimas de $z = \rho(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$ têm o mesmo módulo $\sqrt[n]{\rho}$ e seus respectivos argumentos são termos de uma progressão artimética de primeiro termo $\frac{\alpha}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$. Geometricamente isso significa que todas as raízes n-ésimas de z estão numa mesma circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{\rho}$ e que estão localizados igualmente espaçados formando um ângulo de medida $\frac{2\pi}{n}$ entre duas raízes consecutivas, o que revela que as raízes n-ésimas de z são os vértices de um n-ágono regular convexo inscrito numa circunferência centrada na origem e de raio $\sqrt[n]{\rho}$. Por exemplo, a figura abaixo representa as raízes décimas do número complexo $z = \rho(\cos\alpha + isen\alpha) \neq 0$.



4.1 Raízes da unidade

No caso em que $z = 1$ as raízes n-ésimas de z são chamadas de *raízes n-ésimas da unidade* e são dadas por:

$$\begin{aligned}
&w_0 = 1\\
&w_1 = \cos\tfrac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\tfrac{2\pi}{n}\\
&w_2 = \cos\tfrac{4\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\tfrac{4\pi}{n}\\
&\vdots\\
&w_{n-1} = \cos\tfrac{2(n-1)\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\tfrac{2(n-1)\pi}{n}
\end{aligned}$$

visto que $1 = \cos 0 + i\,\text{sen}\,0$ (o módulo de 1 é o próprio 1 e o argumento é 0), se aplicarmos a fórmula geral

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left[cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i.sen\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right],$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

para as raízes n-ésimas de um número complexo z, temos:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{1} &= \sqrt[n]{1}\left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i.\,\text{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right],\ k = 0, 1, 2, \cdots, n-1\\
&= 1.\left[\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{n}\right) + i.\,\text{sen}\left(\frac{0 + 2k\pi}{n}\right)\right],\ k = 0, \cdots, n-1\\
&= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i.\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right),\ k = 0, \cdots, n-1.
\end{aligned}$$

Para cada $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, definimos

$$w_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i.\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Note que para cada $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, pela fórmula de Moivre, tem-se que $w_k = w_1^k$, noutras palavras, as raízes n-ésimas da unidade são os números complexos

$$w_1, w_1^2, \cdots, w_1^n.$$

Conhecendo-se as raízes n-ésimas da unidade $w_0, w_1, w_2, \cdots, w_{n-1}$, $(n > 1$, inteiro) podemos encontar as raízes da equação $z^n - \zeta^n = 0$, onde $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ da seguinte forma:

$$z^n - \zeta^n = 0 \Leftrightarrow z^n = \zeta^n \Leftrightarrow \frac{z^n}{\zeta^n} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{z}{\zeta} = \sqrt[n]{1} = \begin{cases} w_0\\ w_1\\ \vdots\\ w_{n-1}\end{cases} \Rightarrow z = \begin{cases} \zeta w_0\\ \zeta w_1\\ \vdots\\ \zeta w_{n-1}\end{cases}$$

Teorema. 4 (Propriedades gerais das raízes n-ésimas da unidade)**.** *As raízes n-ésimas da unidade gozam das seguintes propriedades:*

(a) *O produto de duas raízes n-ésimas da unidade continua sendo raiz n-ésima da unidade.*

(b) *O inverso de uma raiz n-ésima da unidade também é raiz n-ésima da unidade.*

(c) *O quociente de duas raízes n-ésimas da unidade continua sendo raiz n-ésima da unidade.*

(d) *Qualquer potência racional de uma raiz n-ésima da unidade ainda é uma raiz n-ésima da unidade.*

Do ponto de vista da Álgebra, a proposição acima nos diz que o conjunto das raízes n-ésimas da unidade formam um grupo multiplicativo.

Proposição. 2. *Sejam* $w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i.\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n}$ *e* $w_j = \cos\frac{2j\pi}{n} + i.\,\text{sen}\,\frac{2j\pi}{n}$ *duas raízes n-ésimas da unidade, com* $k, j \in \{1, 2, .., n-1\}$, *então* $w_k.w_j = w_r$, *onde* r *é o resto da divisão de* $k + j$ *por* n.

Definição. 4.1. *Uma raiz n-ésima da unidade é dita uma* raiz primitiva *quando as suas potências gerarem todas as raízes n-ésimas da unidade.*

Teorema. 5 (Critério de reconhecimento das raízes primitivas da unidade)**.** *Se* $n \geq 2$, *a raiz n-ésima unidade*

$$w_k = cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i.sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \ \textit{tais que } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

é primitiva se, e somente se, $mdc(k, n) = 1$.

5 Problemas resolvidos

Exemplo. 5.1. *(Matematika - Russia) Resolva a equação*

$$6x + 8\sqrt{1-x^2} = 5\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)$$

no intervalo $(\frac{3}{5}, 1$.

Solução. Ora, como queremos que a solução da equação pertença ao intervalo $(\frac{3}{5}, 1 \subset [-1, 1]$, segue que existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tal que $x = \cos\varphi$, obtemos:

$$6cos\varphi + 8\sqrt{1-\cos^2\varphi} = 5\left(\sqrt{1+cos\varphi} + \sqrt{1-cos\varphi}\right) \Rightarrow$$

$$10(0,60cos\varphi + 0,80\sqrt{1-\cos^2\varphi} = 5\left(\sqrt{1+cos\varphi} + \sqrt{1-cos\varphi}\right)$$

Tomando $\varphi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $cos\varphi_0 = 0,60$, segue que $sen\varphi_0 = 0,80$, o que nos permite escrever:

$$10(cos\varphi_0 cos\varphi + sen\varphi_0 sen\varphi) = 5\left(\sqrt{1+cos\varphi} + \sqrt{1-cos\varphi}\right) \Rightarrow$$

$$cos(\varphi_0 - \varphi) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+cos\varphi} + \sqrt{1-cos\varphi}\right)$$

Por fim, como $\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\varphi}{2}}$ e $sen\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\varphi}{2}}$, segue que

$$\begin{aligned} cos(\varphi_0 - \varphi) =& \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+cos\varphi} + \sqrt{1-cos\varphi}\right) \\ =& \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\frac{1+cos\varphi}{2}} + \sqrt{\frac{1-cos\varphi}{2}}\right) \\ =& cos\frac{\pi}{4}(cos\frac{\varphi}{2} - sen\frac{\varphi}{2} \\ =& cos\frac{\pi}{4}cos\frac{\varphi}{2} - cos\frac{\pi}{4}sen\frac{\varphi}{2} \\ =& cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned}$$

Por outro lado, note que $\frac{\varphi_0}{2} < \frac{\pi}{4}$ pois

$$cos\frac{\varphi_0}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\varphi_0}{2}} = \sqrt{\frac{1+0,60}{2}} = \sqrt{0,80} > cos\frac{\pi}{4}.$$

Por fim, como $0 < \varphi_0 - \varphi < \frac{\pi}{2}$ e $0 < \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2}$, segue que

$$cos(\varphi_0 - \varphi) = cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \Leftrightarrow \varphi_0 - \varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \Leftrightarrow \varphi = 2\varphi_0 - \frac{\pi}{2},$$

o que nos permite concluir que

$$\begin{aligned} x =& cos\varphi = cos(2\varphi_0 - \frac{\pi}{2}) = sen(2\varphi_0) \\ =& 2_0 cos\varphi_0 = 2.0,60.0,80 = 0,96 \end{aligned}$$

■

Exemplo. 5.2 (China). *Se x e y são números reais tais que $(x+5)^2 + (y-12)^2 = 14^2$. Determine o mínimo valor assumido pela expressão definida por $f(x,y) = x^2 + y^2$.*

Solução. Podemos reescrever a equação dada da seguinte forma:

$$(x+5)^2 + (y-12)^2 = 14^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x+5}{14}\right)^2 + \left(\frac{y-12}{14}\right)^2 = 1.$$

Dessa forma podemos escrever $(\frac{x+5}{14} = cos\theta$ e $\frac{y-12}{14} = sen\theta$ para algum $\theta \in \mathbb{R}$. Então,

$$x = -5 + 14cos\theta \text{ e } y = 12 + 14sen\theta.$$

Assim,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 =& (14cos\theta - 5)^2 + (14sen\theta + 12)^2 \\ =& 365 + 28(12sen\theta - 5cos\theta) \\ =& 365 + 28.13(\frac{12}{13}sen\theta - \frac{5}{13}cos\theta) \\ =& 365 + 364(cos\beta sen\theta - sen\beta cos\theta) \\ =& 365 + 364sen(\theta - \beta) \end{aligned}$$

onde $cos\beta = \frac{12}{13}$ e $sen\beta = \frac{5}{13}$. Ora, como

$$x^2 + y^2 = 365 + 364sen(\theta - \beta)$$

e $-1 \leq sen(\theta - \beta) \leq 1$, segue que o valor mínimo assumido por $x^2 + y^2$ é $365 + 364.(-1) = 1$.

■

Exemplo. 5.3. *Em $\mathbb{R}$, resolva o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases} \frac{3x-y}{x-3y} = x^2 \\ \frac{3y-z}{y-3z} = y^2 \\ \frac{3z-x}{z-3x} = z^2 \end{cases}$$

Solução. Isolando os x, y e z nas equações acima, obtemos o seguinte sistema (equivalente ao original):

units

$$\begin{cases} y = \frac{3x-x^3}{1-3x^2} \\ z = \frac{3y-y^3}{1-3y^2} \\ x\frac{3z-z^3}{1-3z^2} = z^2 \end{cases}$$

Como a função $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = tanx$ é uma bijeção, segue que existe um único $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $tanu = x$. Então:

$$\begin{cases} y = \frac{3x-x^3}{1-3x^2} \\ z = \frac{3y-y^3}{1-3y^2} \\ x = \frac{3z-z^3}{1-3z^2} = z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3tanu - tan^3u}{1-3tan^2u} = tan3u \\ z = \frac{3tan3u - tan^3 3u}{1-3tan^2 3u} = tan9u \\ x = \frac{3tan9u - tan^3 9u}{1-3tan^2 9u} = tan27u \end{cases}$$

Ora, como $x = tanu$ e $x = tan27u$, segue que $tanu = tan27u$, o que ocorre se, e somente se, $27u - u = k\pi \Leftrightarrow u = \frac{k\pi}{26}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, como $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, segue que:

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{k\pi}{26} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow k = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm12.$$

Perceba que $k = 0$ não convém, pois se $k = 0$ implicaria que $x = y = z = 0$ que evidentemente não é solução do sistema. Enfim as soluções do sistema são os números da forma

$$x = tan\frac{k\pi}{26}, \quad y = tan\frac{3k\pi}{26}, \quad z = tan\frac{9k\pi}{26},$$

onde $k = \pm1, \pm2, \ldots, \pm12$

■

Exemplo. 5.4 (USA). *Se $a_1, a_2, \cdots, a_n \in [-2, 2]$ são tais que*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0.$$

Mostre que:

$$|a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3| \leq 2n.$$

Solução. Ora, como cada $a_k \in [-2, 2]$ podemos escrever $a_k = 2cosb_k$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n$. Por outro lados, usando a identidade

$$cos(3x) = 4cos^3x - 3cosx$$

segue que:

$$\begin{cases} 2cos(3b_1) = 8cos^3b_1 - 6cosb_1 \\ 2cos(3b_2) = 8cos^3b_2 - 6cosb_2 \\ \vdots \\ 2cos(3b_n) = 8cos^3b_n - 6cosb_n \end{cases}$$

Adicionando membro a membro essas igualdades, segue que:

$$\begin{aligned} 2[cos(3b_1) + \ldots + cos(3b_n)] =& [(2cosb_1)^3 + \ldots + (2cosb_n)^3] \\ &+ 3(2cosb_1 + \ldots + 2cosb_n) \\ =& (a_1^3 + \ldots + a_n^3) + 3(\underbrace{a_1 + \ldots + a_n}_{=0}) \\ =& a_1^3 + \ldots + a_n^3 \end{aligned}$$

Diante do exposto,

$$\begin{aligned} |a_1^3 + \ldots + a_n^3| =& |2[cos(3b_1) + \ldots + cos(3b_n)]| \\ =& 2.|cos(3b_1) + \ldots + cos(3b_n)| \\ \leq& 2|cos(3b_1)| + \ldots + |cos(3b_n)| \\ \leq& 2(1 + 1 + \ldots + 1) \\ =& 2n. \end{aligned}$$

■

Exemplo. 5.5. *Dados números inteiros não negativos n e p tais que $p \leq n$, o número binomial n sobre p é definido por $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$. Mostre que:*

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots = (\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4}.$$

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \cdots = (\sqrt{2})^n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4}.$$

Solução. Sendo i a unidade imaginária dos números complexos, segue que:

$$\begin{aligned} (1+i)^n =& \binom{n}{0}.1^n.i^0 + \binom{n}{1}.1^{n-1}.i^1 + \ldots + \binom{n}{n}.1^0.i^n \\ =& \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + i\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \cdots\right] \end{aligned}$$

Por outro lado, como $1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\right)$, pela fórmula da potenciação de Moivre, segue que

$$\begin{aligned} (1+i)^n =& \left[\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\right)\right]^n \\ =& (\sqrt{2})^n \left(cos\frac{n\pi}{4} + isen\frac{n\pi}{4}\right) \\ =& (\sqrt{2})^n cos\frac{n\pi}{4} + (\sqrt{2})^n sen\frac{n\pi}{4} \end{aligned}$$

Por fim, igualando-se as partes real e imaginária nas duas expressões que obtivemos para $(1+i)^n$, segue que:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots = (\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4}.$$

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \cdots = (\sqrt{2})^n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4}.$$

■

Exemplo. 5.6. *Se $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ são os vértices de um polígono regular inscrito numa circunferência de raio 1. Sendo A_1A_i a medida do segmento A_1A_i para $i = 1, 2, \cdots, n$, mostre que $A_1A_2 \cdot A_1A_3 \cdot A_1A_4 \cdots A_1A_n = n$.*

Solução. Os vértices de um n-ágino convexo inscrito numa circunferência de raio 1 podem ser vistos como as raízes (complexas da equação $z^n - 1 = 0$. (que são exatamente as raízes n-ésimas da unidade)

$$\begin{aligned} &A_1 = w_0 = 1 \\ &A_2 = w_1 = \cos\tfrac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen}\tfrac{2\pi}{n} \\ &A_3 = w_2 = \cos\tfrac{4\pi}{n} + i \operatorname{sen}\tfrac{4\pi}{n} \\ &\vdots \\ &A_n = w_{n-1} = \cos\tfrac{2(n-1)\pi}{n} + i \operatorname{sen}\tfrac{2(n-1)\pi}{n} \end{aligned}$$

Lembrando que no plano complexo a distância entre dois números complexos z_1 e z_2 é dada por $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, segue que:

$$\begin{aligned} A_1A_2 \cdot A_1A_3 \cdot \cdots A_1A_n =& |1 - w_1|.|1 - w_2|.\ldots.|1 - w_{n-1}| \\ =& |(1 - w_1)(1 - w_2)\ldots(1 - w_n)| \end{aligned}$$

Por outro lado, como o polinômio $p(z) = z^n - 1$ que tem como raízes os números $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ pode ser escrito na sua dforma fatorada

$$p(z) = (z - w_0)(z - w_1)(z - w_2)\ldots(z - w_{n-1}) \Rightarrow$$
$$z^n - 1 = (z - 1)(z - w_1)(z - w_2)\ldots(z - w_{n-1}) \Rightarrow$$
$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = (z - w_1)(z - w_2)\ldots(z - w_{n-1}) \Rightarrow$$
$$z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + 1 = (z - w_1)(z - w_2)\ldots(z - w_{n-1})$$

Fazendo $z = 1$ na última identidade acima, segue que:

$$1^{n-1} + 1^{n-2} + \ldots + 1 = (1 - w_1)(1 - w_2)\ldots(1 - w_{n-1}) \Rightarrow$$
$$(1 - w_1)(1 - w_2)\ldots(1 - w_{n-1}) = n,$$

o que revela que

$$A_1A_2 \cdot A_1A_3 \cdot \cdots A_1A_n = |(1 - w_1)(1 - w_2)\ldots(1 - w_n)| = n$$

■

Exemplo. 5.7. *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 4, ac - bd = 0$. Qual o valor máximo de $Q = \frac{a}{ad+bc}$?*

Solução. Definindo $z = a + bi$ e $w = c + di$, segue que

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1} = 1 \text{ e } |w| = \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} z \cdot w =&(a + bi)(c + di) \\ =&\underbrace{(ac - bd)}_{=0} + (ad + bc)i \\ =&(ad + bc)i \end{aligned}$$

Então,

$$|z \cdot w| = |(ad + bc)i| \Rightarrow |z| \cdot |w| = |(ad + bc)| \cdot |i|$$

$$\Rightarrow 1 \cdot 2 = |ad + bc| \cdot 1 \Rightarrow |ad + bc| = 2.$$

Além disso, $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 1 - b^2 \leq 1 \Rightarrow |a| \leq 1$. Por fim,

$$Q = \frac{a}{ad + bc} \Rightarrow |Q| = \frac{|a|}{|ad + bc|} = \frac{|a|}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow Q_{max} = \frac{1}{2}.$$

∎

Exemplo. 5.8. *Em $\mathbb{R}$, resolva o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases} 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ xy + xz + yz = 1 \end{cases}$$

Solução. Partindo da primeira equação podemos chegar em

$$\frac{x}{3(1 + x^2)} = \frac{y}{4(1 + y^2)} = \frac{z}{5(1 + z^2)}$$

Essa última igualdade revela que x, y e z teêm que possuir o mesmo sinal que se a tripla (x, y, z) for solução do sistema, então a tripla $(-x, -y, -z)$ também será uma solução. Por outro lado exstem $\alpha, \beta e \gamma \in (0, \pi)$ tais que

$$x = tan\frac{\alpha}{2}, \quad y = tan\frac{\beta}{2}, \quad z = tan\frac{\gamma}{2}.$$

Ora, como $\operatorname{sen}\varphi = \frac{2tan\frac{\varphi}{2}}{1+tan^2\frac{\varphi}{2}}$, segue que:

$$sen\alpha = \frac{2x}{1 + x^2}, \quad sen\beta = \frac{2y}{1 + y^2} \quad sen\gamma = \frac{2z}{1 + z^2}.$$

o que nos permite escrever

$$\frac{x}{3(1 + x^2)} = \frac{y}{4(1 + y^2)} = \frac{z}{5(1 + z^2)} \Rightarrow \frac{sen\alpha}{3} = \frac{sen\beta}{4} = \frac{sen\alpha}{5}$$

Além disso a equação

$$\frac{x}{3(1 + x^2)} = \frac{y}{4(1 + y^2)} = \frac{z}{5(1 + z^2)}$$

nos permite escrever

$$\frac{1}{z} = \frac{x + y}{1 - xy} \Rightarrow cotg\frac{\gamma}{2} = tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right).$$

Como $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$, podemos concluir que

$$cotg\frac{\gamma}{2} = tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Isso revela que α, β e γ são as medidas dos ângulos internos de um triângulo. Ora, como $\frac{sen\alpha}{3} = \frac{sen\beta}{4} = \frac{sen\alpha}{5}$, pela lei dos senos segue que as medidas dos lados desse triângulo obdecem a proporção $3 : 4 : 5$, o que revela que esse triângulo é retângulo e que $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Portanto, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ e $\operatorname{sen}\beta = \frac{4}{5}$. Por fim,

$$x = tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}, \quad y = tan\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \quad z = tan\frac{\gamma}{2} = 1,$$

o que nos permite concluir que as soluções do sistema são $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right)$ e $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 1\right)$.

∎

Exemplo. 5.9. *Sejam n um inteiro positivo e $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$ e $z^n + z + 1 = 0$. Mostre que n não pode ser 196.*

Solução. De fato, suponha, por absurdo, que $n = 196$. Nesse caso,

$$z^{196} + z + 1 = 0 \Rightarrow z^{196} = -z - 1 \Rightarrow |z^{196}| = |-z - 1| \Rightarrow |z|^{196} = |z + 1|.$$

Ora, como $|z| = 1$, segue que $|z + 1| = 1^{196} = 1$. Se $= x + iy \in \mathbb{C}$, segue que:

$$|z + 1| = 1 \Leftrightarrow |x + yi + 1| = 1 \Leftrightarrow |(x + 1) + yi| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 = 1.$$

Por outro lado $|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$. Assim,

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = 1 \Leftrightarrow 1 + 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Por outro lado,

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, $z = -\frac{1}{2} \pm i.\frac{\sqrt{3}}{2}$. Agora aplicando Moivre, podemos mostrar que esses valores de z não cumprem a equação $z^{196} + z + 1 = 0$, o que é uma contradição, logo n não pode ser igual a 196, como queríamos demonstrar! ∎

6 Problemas propostos

1. (Russia)Quais são as raízes da equação

$$8x(12 - x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$$

no intervalo $[-1, 1]$?

2. Prove que para quaisquer números reais positivos a, b, c e d é válida a seguinte desigualdade:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a + d)(b + c)}.$$

3. (Russia) A raiz real da equação

$$\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$$

possui a forma $\frac{\sqrt{m+n\sqrt{p}}}{q}$. Determine o valor de $m+n+p+q$.

4. Determine todas as soluções reais do sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 4x^3 - 3x = \sqrt{\frac{1+x}{2}} \end{cases}.$$

5. Em $\mathbb{R}$, resolva o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} y = \frac{3x-x^3}{1-3x^2} \\ z = \frac{3y-y^3}{1-3y^2} \\ x = \frac{3z-z^3}{1-3z^2} \end{cases}$$

6. (Romênia) Em $\mathbb{R}$, resolva o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a+b+c+d+e = 0 \\ a^3+b^3+c^3+d^3+e^3 = 0 \\ a^5+b^5+c^5+d^5+e^5 = 10 \end{cases}$$

7. Em $\mathbb{R}$, resolva a equação $x^3 - 3x = \sqrt{x+2}$.

8. Se x e y são números reais tais que

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = a \\ \cos x + \cos y = b \\ \cos(x-y) = c \end{cases},$$

mostre que $a^2 + b^2 = 2(1+c)$.

9. Se $f(x) = \frac{x\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}}$, determine o valor de

$$g(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{2019 \text{ vezes}}(x).$$

10. Calcule o valor máximo da função real definida por

$$f(x) = \sqrt{2-x} + 2\sqrt{3-x}.$$

11. Se $x \in (0,1)$, qual o valor máximo da função real definida por $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$?

12. Quantas raízes reais equação $9 - x^2 = 2x\left(\sqrt{10-x^2} - 1\right)$ possui?

13. Qual a diferença entre a maior e a menor raiz da equação

$$\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}} = \frac{2}{x}?$$

14. Determine as raízes reais da equação

$$\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}.$$

15. Se x, y e z são números reais do intervalo $(-1,1)$ tais que $xy + yz + zx = 1$, mostre que:

$$6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \leq 1 + (x+y+z)^2.$$

16. Seja a um número real positivo. Resolva a equação

$$\sqrt{a}\sqrt{a+\sqrt{a^2-x^2}} + \sqrt{3a}\sqrt{a-\sqrt{a^2-x^2}} = 2\sqrt{2}x,$$

com $x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq a$.

17. Determine todas as soluções reais da equação

$$x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3.$$

18. Se a, b e c são números reais distintos que satisfazem as seguintes equações:

$$\begin{cases} a^3 = 3(b^2+c^2) - 25 \\ b^3 = 3(c^2+a^2) - 25 \\ c^3 = 3(a^2+b^2) - 25 \end{cases}$$

Determine o valor do produto $a.b.c$

19. Determine o maior e o menor valor da expressão:

$$xy + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}.$$

20. (ITA)Determine para quais valores de a tal que inequação

$$\sqrt{1-x^2} \geq a - x$$

admite solução.

21. Se a e b são números reais não nulos tais que $a^2 + b^2 = 4$, mostre que

$$\frac{ab}{a+b+2} \leq \sqrt{2} - 1.$$

22. Se $x \in \mathbb{R}$ e $\sqrt{1+mx} = x + \sqrt{1-mx}$, onde m é um parâmetro real, determine os valores de m para os quais a equação acima possui solução não nula.

23. Quantas raízes reais possui a equação

$$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}} = x?$$

24. Determine o valor máximo do produto xy, se os números reais x e y satisfazem a igualdade

$$y(1+x^2) = x\left(\sqrt{1-4y^2} - 1\right).$$

25. Determine todas as soluções reais da equação

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(4-\sqrt{3}x)^2} = 1.$$

26. Se $3x + 4y = 5$, determine o valor mínimo da função $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $\varphi(x,y) = x^2 + y^2$.

27. Sejam a, b e c números reais positivos cumprindo a condição $c^2 = a^2 - ab + b^2$. Mostre que $(a-c)(b-c) \leq 0$.

28. Sejam a, b e c números reais positivos tais que $a+b+c = abc$, mostre que:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

29. Considere a sequência definida por $x_0 = 2$ e $x_{n+1} = \frac{2+x_n}{1-2x_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que todos os termos dessa sequência são não nulos.

30. Considere as sequências de números reais definidas por:

$$x_1 = 2 \ e \ x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n^2 - 1}, \text{ para } n \geq 1.$$

$$y_1 = 4 \ e \ y_{n+1} = \frac{2y_n}{y_n^2 - 1}, \text{ para } n \geq 1.$$

$$z_1 = \frac{6}{7} \ e \ z_{n+1} = \frac{2z_n}{z_n^2 - 1}, \text{ para } n \geq 1.$$

Mostre que, para todo n natural tem-se $x_n + y_n + z_n = x_n y_n z_n$.

31. Dados x e y reais, mostre que: $-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}$.

32. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais tais que $x_{n+1} = \frac{\sqrt{3}x_n - 1}{x_n + \sqrt{3}}$ para todo natural n, mostre que essa sequência é periódica.

33. Resolva o seguinte sistema de equações reais:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = 2y \\ y - \frac{1}{y} = 2z \\ z - \frac{1}{z} = 2w \\ w - \frac{1}{w} = 2x \end{cases}$$

34. Resolva a equação $3\sqrt{3}x^3 - 3x^2 + 9x - \sqrt{3} = 0$.

35. Determine todas a soluções do sistema

$$\begin{cases} x^3 - 3x = y \\ y^3 - 3y = z \\ z^3 - 3z = x \end{cases}$$

36. Se $a, b, c \in (0, 1)$, prove que:

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1.$$

37. Determine todas as soluções reais do sistema

$$\begin{cases} 2x + x^2 y = y \\ 2y + y^2 z = z \\ 2z + z^2 x = x \end{cases}.$$

38. Sejam a, b e c números reais todos diferentes de -1 e 1, tais que $a+b+c = abc$. Mostre que:

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} = \frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}.$$

39. Sejam a, b e c números reais. Prove que:

$$(ab + bc + ca - 1)^2 \leq (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$$

40. Encontre as raízes reais da equação

$$\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}.$$

41. Sejam x, y e z números reais tais que $x + y + x = xyz$. Mostre que:

$$x(1-y^2)(1-z^2) + y(1-x^2)(1-z^2) + z(1-x^2)(1-y^2) = 4xyz.$$

42. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^3 - 3x = \sqrt{x+2}$.

43. Sendo a, b e c números reais, mostre que:

$$\frac{|a-b|}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} \leq \frac{|a-c|}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+c^2}} + \frac{|b-c|}{\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+c^2}}$$

44. Sejam a, b e c números reais diferentes de $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Prove que a igualdade $a+b+c = abc$ ocorre se, e somente se,

$$\frac{3a-a^3}{3a^2-1}\frac{3b-b^3}{3b^2-1}\frac{3c-c^3}{3c^2-1} = \frac{3a-a^3}{3a^2-1} + \frac{3b-b^3}{3b^2-1} + \frac{3c-c^3}{3c^2-1}.$$

45. Sendo x, y e z números reais positivos tais que

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25 \\ \frac{y^2}{3} + z^2 = 9 \\ z^2 + zx + x^2 = 16 \end{cases},$$

determine o valor de $xy + 2yz + 3zx$.

46. Determine o valor máximo de

$$S = (1-x_1)(1-y_1) + (1-x_2)(1-y_2).$$

47. Sejam a, b e c números reais. Prove que:

$$(ab + bc + ca - 1)^2 \leq (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1).$$

48. Prove que $\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

49. Se $z \in \mathbb{C}$ é tal que $z^7 = -1$, calcule o valor de $\displaystyle\sum_z \frac{1}{|1-z|^2}$.

50. (a) Mostre que todas as raízes do polinômio $p(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots + nz^{n-1}$ estão no interior do disco unitário centrado na origem.
    (b) Mostre que a mesma conclusão continua sendo verdadeira para qualquer polinômio $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \in \mathbb{R}[x]$ e $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n$.

51. Mostre que existe um polinômio p com coeficientes inteiros tal que $\cos(n\theta) = p(\cos\theta)$, para todo inteiro positivo n e todo θ fixados (Esse polinômio é chamado de **Polinônio de Tchebyshev do primeiro tipo**).

52. (OMRN - Lista de preparação) Calcule o valor do produto
$$P = \cos\left(\frac{\pi}{2020}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2020}\right)\cdots\cos\left(\frac{2019\pi}{2020}\right).$$

53. (JEE - Índia) Mostre que:
$$\begin{aligned} S &= \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right)\\ &+\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)\\ &+\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)\\ &+\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)\\ &+\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)\\ &=\frac{5}{16}\end{aligned}$$

54. (JEE - Índia) Mostre que:

(a) $\cos\left(\frac{\pi}{22}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{22}\right)\cdots\cos\left(\frac{9\pi}{22}\right)=\frac{\sqrt{11}}{32}$.

(b) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{11}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{11}\right)\cdots\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{11}\right)=\frac{\sqrt{11}}{32}$.

55. (JEE - Índia) Mostre que:
$$\cos\left(\frac{\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)\ldots\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)=\frac{1}{32}.$$

56. Mostre que as raízes da equação polinomial
$$7x^3-35x^2+21x-1=0$$
são $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{14}, \operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{14}$ e $\operatorname{tg}^2\frac{5\pi}{14}$.

57. Mostre que as raízes da equação polinomial
$$x^3-\sqrt{7}x^2-7x+\sqrt{7}=0$$
são $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}, \operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{7}$ e $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{7}$.

58. Mostre que as raízes da equação polinomial $8x^3-6x+1=0$ são
$$\cos\frac{2\pi}{9}, \cos\frac{4\pi}{9}\ e\ \cos\frac{8\pi}{9}.$$

59. Mostre que as raízes da equação polinomial
$$16x^4+8x^3-12x^2-4x+1=0$$
são $\cos\frac{2\pi}{9}, \cos\frac{4\pi}{9}, \cos\frac{6\pi}{9}$ e $\cos\frac{8\pi}{9}$.

60. (a) Determine uma equação polinomial do terceiro grau, com coeficientes inteiros, cujas raízes são
$$\sec^2\frac{2\pi}{9}, \sec^2\frac{4\pi}{7}\ e\ \sec^2\frac{6\pi}{7}.$$
(b) Utilizando o item anterior, mostre que:
$$\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{7}+\operatorname{tg}^2\frac{4\pi}{7}+\operatorname{tg}^2\frac{6\pi}{7}=21.$$

61. Determine uma equação polinomial do quinto grau, com coeficientes inteiros, cujas raízes são
$$\cos\frac{\pi}{11}, \cos\frac{3\pi}{11}, \cos\frac{5\pi}{11}, \cos\frac{7\pi}{11}\ e\ \cos\frac{9\pi}{11}.$$

62. Mostre que as raízes de $x^4+4x^3-6x^2-4x+1=0$ são
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}, \operatorname{tg}\frac{5\pi}{16}, \operatorname{tg}\frac{9\pi}{16}\ e\ \operatorname{tg}\frac{13\pi}{16}.$$

63. Mostre que as raízes da equação polinomial
$$\sqrt{3}x^3-3x^2-3\sqrt{3}x+1=0$$
são $\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}, \operatorname{tg}\frac{7\pi}{18}$ e $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{18}$.

64. Mostre que as raízes da equação polinomial
$$x^4-x^3-4x^2+4x+1=0$$
são $2\cos\frac{2\pi}{15}, 2\cos\frac{4\pi}{15}, 2\cos\frac{8\pi}{15}$ e $2\cos\frac{14\pi}{15}$.

65. (a) Determine um polinômio p, com coeficientes inteiros, tal que $p(\operatorname{sen}10^o)=0$.
(b) Conclua do item anterior de $\operatorname{sen}10^o$ é irracional.

66. Determine todas soluções reais da equação $8x^3-6x-1=0$.

67. Se p e q são as raízes da equação $x^2+px+q=0$, calcule, em função de p e q o valor da expressão
$$E=\operatorname{sen}^2(a+b)+p\operatorname{sen}(a+b)\cos(a+b)+q\cos^2(a+b).$$

68. (OCM)
(a) Mostre que $x_1=2.\cos\frac{2\pi}{9}, x_2=2.\cos\frac{8\pi}{9}$ e $x_3=2.\cos\frac{14\pi}{9}$ são raízes da equação $x^3-3x+1=0$.
(b) Mostre que x_1, x_2 e x_3 são números irracionais.

69. (OCM)Para k um inteiro positivo, definimos
$$f_k(x)=a_{0k}x^k+a_{1k}x^{k-1}+\cdots+a_{kk}.$$
Calcule o determinante da matriz
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ f_1(\cos\alpha_1) & f_1(\cos\alpha_2) & \cdots & f_1(\cos\alpha_n)\\ f_2(\cos\alpha_1) & f_2(\cos\alpha_2) & \cdots & f_2(\cos\alpha_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ f_{n-1}(\cos\alpha_1) & f_{n-1}(\cos\alpha_2) & \cdots & f_{n-1}(\cos\alpha_n)\end{pmatrix}$$

70. Sejam a, b e c as raízes da equação $3x^3-13x^2+14x-2=0$.
(a) Prove que a, b e c são números reais positivos.
(b) Calcule o valor de $S=arctg(a)+artg(b)+arctg(c)$.

71. (Mathematical excalibur) Mostre que:
$$\tan^2 1^o+\tan^2 2^o+\ldots+\tan^2 89^o=4005.$$

72. Se n é um inteiro não negativo, mostre que:
$$\binom{n}{0}+\binom{n}{6}+\binom{n}{12}+\ldots=\frac{1}{3}\left[2^{n-1}+\cos\frac{n\pi}{3}+(\sqrt{3})^n\cos\frac{n\pi}{6}\right].$$

73. Prove a identidade
$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{6\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}(5-3\sqrt[3]{7})}.$$