Uma rápida introdução a Análise Real

Prof. George Lucas

· Sequências e Séries

Definição (o famoso *Limite*): Dada uma sequência de números reais $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots)$, dizemos que $L = \lim a_n$ se para qualquer $\epsilon > 0$ existe um inteiro positivo $N(\epsilon)$ tal que para todo $n \geq N(\epsilon)$ temos que $|a_n - L| < \epsilon$.

Vejamos alguns exemplos:

Se tivermos a sequência $\left(\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}, \dots\right)$, veja que 0 seria o limite, uma vez que para qualquer distância $\epsilon > 0$ que escolhamos, a partir de um momento sua trajetória será $\frac{1}{M} \to \frac{1}{M+1} \to \frac{1}{M+2} \to \cdots$ onde M é um inteiro tal que $\frac{1}{M} < \epsilon$ e portanto todos os pontos da trajetória a partir daí ficarão a uma distância menor que ϵ do 0 . Assim, dizemos que $\lim \quad \frac{1}{n} = 0$.

Observe nessa situação que a sequência, apesar de ser aproximar muito do 0 , ela nunca o alcançará. Assim, o limite de uma sequência não precisa ser um termo da sequência.

Um exemplo um pouco diferente é a sequência $(\pi,\ \pi,\ \pi,\ \pi,\ \dots)$ cujo limite é exatamente π, escrevemos então $\lim \pi \ = \ \pi$.

Já a sequência $(1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \dots)$ não admite limite.

E se a sequência for dada por $a_n = -\frac{1}{n}$ se n é ímpar e $a_n = \frac{1}{n^2}$ se n é par, o gafanhoto consegue um abrigo? (Pense sobre!)

Bem, aposto que quando estávamos definindo limite acima, muitos de vocês devem ter se perguntado: "uma sequência pode admitir dois ou mais limites?" Bem, a resposta é NÃO. Vamos provar isso!

Suponha que L_1 e L_2 sejam limites da sequência, sem perda de generalidade $L_1 > L_2$. Tome então $\epsilon = \frac{L_1 - L_2}{3}$. Isso significa que a partir de um momento o gafanhoto irá se encontrar num ponto x da sequência tal que $|x - L_1| < \epsilon$ e $|x - L_2| < \epsilon$, mas pela desigualdade triangular:

$2\epsilon > |x - L_1| + |L_2 - x| \geq |L_2 - L_1| = 3\epsilon$, uma contradição.

Desigualdade triangular: Dados reais quaisquer $x,\ y$ temos que $|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$

Assim, caso o limite de uma sequência exista, esse limite é único!

Quando uma sequência admite limite chamamos essa sequência de *convergente*. Caso uma sequência não seja convergente, a chamamos de *divergente*.

Definição: Dada uma sequência de números reais infinita $(a_1,\ a_2,\ \dots)$, definimos uma subsequência dela, uma sequência infinita da forma $\left(a_{j_1},\ a_{j_2},\ a_{j_3},\ \dots\right)$ onde $1 \leq j_1 < j_2 < j_3 < \cdots$ são números inteiros.

Exemplos:

$(1,3,5,7,\dots)$ é uma subsequência de $(1,2,3,4,5,6,7,\dots)$;

$(-1,-1,-1,\dots)$ é uma subsequência de $(1,-1,1,-1,\dots)$;

$(-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ \dots)$ é uma subsequência de $\left(-\sqrt{1},\ \sqrt{2},\ -\sqrt{3},\ \sqrt{4},\ -\sqrt{5},\ \dots\right)$,

Mas $(6,4,2,8,10,12,14,16,18,20,\dots)$ não é subsequência de $(1,2,3,4,5,6,\dots)$

Nem $\left(\sqrt{6},\ \sqrt{6},\ \sqrt{6},\ \dots\right)$ é subsequência de $\left(\sqrt{2},\ \sqrt{4},\ \sqrt{6},\ \sqrt{8},\ \sqrt{10},\ \sqrt{12},\ \dots\right)$.

Teorema 1: Seja $\{a_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência convergente de números reais e seja $L = \lim\ a_n$. Seja $\left\{a_{n_j}\right\}_{j\geq 1}$ uma subsequência de $\{a_n\}_{n\geq 1}$. Então $\lim\ a_{n_j} = L$.

Prova: Indutivamente obtemos $n_j \geq j$, além disso, dado $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ tal que para todo $j \geq N(\epsilon)$ temos $\left|a_j - L\right| < \epsilon$, e assim, $\left|a_{n_j} - L\right| < \epsilon$, como queríamos.

Definição: Dizemos que uma sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é *limitada superiormente* se existe um número real M tal que $a_n \leq M$ para todo inteiro positivo n . De maneira análoga, dizemos que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é *limitada inferiormente* se existe um número real m tal que $a_n \geq m$ para todo inteiro positivo n .

Se uma sequência dor simultaneamente limitada superiormente e inferiormente dizemos simplesmente que ela é *limitada*. Note que isso implica a existência de um número real T tal que $|a_n| < T$ para todo inteiro positivo n , pois basta tomar $T = \max\{|m|,|M|\}$.

Exemplos:

A sequência $(-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\dots)$ é limitada inferiormente, mas não é limitada, uma vez que não é limitada superiormente.

A sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ definida por $a_n = -n$ se n é par e $a_n = \frac{1}{n^2}$ se n é ímpar é limitada superiormente, mas não é limitada.

A sequência $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n\geq 1}$ é limitada.

Bem, tais M e m da definição acima são chamados *cota superior* e *cota inferior*, respectivamente. Ora, mas é claro que se M é uma cota superior, $M+1$ também é, e se m é uma cota inferior, $m-1$ também é. E aí vamos para mais uma definição!

Definição (o supremo e o ínfimo): Se $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência limitada superiormente, chamamos de $\sup\{a_n\}$ a menor das cotas superiores. Analogamente, se é limitada inferiormente, chamamos de $\inf\{a_n\}$ a maior das cotas inferiores.

Teorema 2: Se $\{a_n\}_{n\geq 1}$é uma sequência limitada superiormente, então existe um inteiro positivo n_0 tal que $a_{n_0} = \sup \{a_n\}$ ou ela admite uma subsequência $\left\{a_{n_j}\right\}_{j\geq 1}$ convergente com $\lim a_{n_j} = \sup\{a_n\}$.

Interessante, não? Vejamos a prova disso.

Prova: Suponha que $a_n < \sup \{a_n\}$ para todo inteiro positivo n e seja $M = \sup\{a_n\}$. Tome $n_1 = 1$ e indutivamente, dado n_j, escolha $n_{j+1} > n_j$ como o menor inteiro k tal que $a_k \geq a_{n_j}$.

Por que tal k existe? Ora, se tal k não existisse, então $a_w < a_{n_j}$ para todo $w > n_j$, e assim, $\sup\{a_n\} = \max\left\{a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{n_j}\right\} < M$, uma contradição. Assim, construímos uma subsequência crescente $\left\{a_{n_j}\right\}_{j\geq 1}$.

Observe que, indutivamente, $a_{n_j} = \max\left\{a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{n_j}\right\}$.

Logo, como M é a menor das cotas superiores, sempre vão existir termos da sequência suficientemente próximos de M , isto é, dado $\epsilon > 0$, existe ñ tal que $M - \epsilon < a_{ñ} < M$. Assim tomando $n_j >$ ñ obtemos $M - \epsilon < a_{ñ} \leq a_{n_j} < M$, isto é, $\left|a_{n_j - M}\right| < \epsilon$ para todo j a partir de um ponto. Portanto $\lim a_{n_j} = M$, como queríamos.

Teorema 2': Se $\{a_n\}_{n\geq 1}$é uma sequência limitada inferiormente, então existe um inteiro positivo n_0 tal que $a_{n_0} = \inf\{a_n\}$ ou ela admite uma subsequência $\left\{a_{n_j}\right\}_{j\geq 1}$ convergente com $\lim a_{n_j} = \inf\{a_n\}$.

Prova: Aplique o teorema anterior na sequência $\{-a_n\}_{n\geq 1}$.

Corolário: Seja $\{a_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência crescente (ou decrescente) e limitada, então tal sequência converge.

Prova: Seja $M = \sup\{a_n\}$ caso seja crescente (no outro caso tome o ínfimo). Se existe n_0 com $a_{n_0} = M$ então $a_n = M$ para todo $n \geq n_0$ e assim $\lim a_n = M$. Se não, a subsequência que construímos na prova do teorema passado é exatamente a sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$.

Além disso, temos um outro teorema nessa vibe:

Teorema de Bolzano-Weierstrass: Seja $\{a_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência limitada. Então tal sequência possui uma subsequência convergente.

Prova: A ideia é bem fofinha! Seja $M_k = \sup\{a_n\}_{n\geq k}$. Se existe algum k tal que $a_n < M_k$ para todo $n \geq k$, então pelo teorema 2 , $\{a_n\}_{n\geq k}$ admite subsequência convergente.

Suponha agora que para todo $k \geq 1$ existe $n_k \geq k$ tal que $a_{n_k} = M_k$.

Bem, como $\{M_k\}_{k\geq 1}$ é decrescente e limitada, ela é convergente, pelo corolário acima. Seja $L = \lim M_k$.

Considere veja que se existe uma sequência $\left\{M_{k_j}\right\}_{j\geq 1}$ tal que $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ e $n_{k_1} < n_{k_2} < n_{k_3} < \cdots$ então tal sequência é subsequência de $\{M_k\}$ o que nos garante que ela é convergente, e é uma subsequência de $\{a_n\}$ pois $\left\{M_{k_j}\right\} = \left\{a_{n_{k_j}}\right\}$.

Mas isso é fácil. Construa indutivamente! $k_1 = 1$ e dados $k_1 < k_2 < \cdots < k_j$ tome $k_{j+1} > \max\left\{k_{j\,,}\, n_{k_j}\right\}$ pois assim $n_{k_{j+1}} \geq k_{j+1} > n_{k_j}$

Definição: Dizemos que uma sequência $\{x_n\}$ é uma *sequência de Cauchy* quando para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ tal que para todo $m,\ n\ \geq N(\epsilon)$ temos $|x_m - x_n| < \epsilon$.

É claro que toda sequência convergente é de Cauchy, pois sendo $L = \lim x_n$, então dado $\epsilon > 0$ existe $N\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ satisfazendo $n \geq N\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \to |x_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$. Daí, para $m, n \geq N\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \to |x_m - x_n| \leq |x_m - L| + |L - x_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

Por outro lado, mostremos que toda sequência real de Cauchy é convergente.

Teorema 3: Toda sequência real de Cauchy é convergente.

Prova: Tomando $\epsilon = 1$ obtemos que existe t tal que para todo $m, n \geq t$ temos que $|x_m - x_n| < 1$, em particular, $x_t - 1 < x_n < x_t + 1$ para todo $n \geq t$ o que nos dá $\{x_n\}_{n\geq t}$ é limitado e portanto possui uma subsequência convergente pelo teorema de Bolzano-Weierstrass. Seja $\left\{x_{h_i}\right\}_{i\geq 1}$ tal subsequência convergente, com $h_1 < h_2 < h_3 < \cdots$. Seja $L = \lim x_{h_i}$. Bem, sabemos que dado $\epsilon > 0$ existe $N\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ tal que para $i \geq N\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \to \left|x_{h_i} - L\right| < \frac{\epsilon}{2}$, além disso, existe $M\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ tal que $m, n \geq M\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \to |x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$. Finalmente, tomando $n \geq M\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$obtemos:

Escolha i tal que $i \geq N\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$, $h_i \geq M\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ e assim: $|x_n - L| \leq \left|x_n - x_{h_i}\right| + \left|x_{h_i} - L\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, o que nos dá $\lim x_n = L$.

Observação ao aluno curioso: Ué, nos parece meio desnecessário nomear *sequência de Cauchy* e *sequência convergente* os mesmos tipos de sequência, né? Bem, vamos esclarecer um pouco isso...

Esse teorema não vale para todos os conjuntos munidos de uma *métrica*. Por exemplo, imagine o conjunto dos números racionais. Agora tome uma sequência de racionais que converge para $\sqrt{2}$nos reais, por exemplo considerando a representação decimal de $\sqrt{2} = 1{,}4142135623731\ldots$ e construa a sequência $x_1 = 1{,}4$; $x_2 = 1{,}41$; $x_3 = 1{,}414$; $x_4 = 1{,}4142$; $x_5 = 1{,}41421$; ... então temos que $\left|x_n - \sqrt{2}\right| < 10^{-n}$ e em particular, $\{x_n\}_{n\geq 1}$ é de Cauchy tanto nos reais quanto nos racionais. Entretanto, $\{x_n\}_{n\geq 1}$ não converge nos racionais, apesar de ser de Cauchy.

Dizemos que um conjunto munido de uma métrica é *completo* se toda sequência de Cauchy converge.

Veja que $\mathbb{R}$ é completo, mas $\mathbb{Q}$ não é.

Definição (Limites infinitos): Dizemos que uma sequência $\{t_n\}_{n\geq 1}$ satisfaz $\lim t_n = \infty$ quando para todo número real M temos que $t_n > M$ para todo $n \geq N(M)$, sendo $N(M)$ um inteiro.

Analogamente, dizemos que $\lim t_n = -\infty$ quando para todo número real m temos que $t_n < m$ para todo $n \geq N(m)$, sendo $N(m)$ um inteiro.

Exemplos: $lim - n = -\infty$ e $\lim 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \infty$, apesar de ambas as sequências serem divergentes. Enquanto que a sequência divergente $\{(-1)^n n\}_{n\geq 0}$ NÃO satisfaz $\lim(-1)^n\, n = \infty$ NEM $\lim(-1)^n\, n = -\infty$.

Definição: Dada uma sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ definimos a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ por $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ = $\lim \sum_{k=1}^{n} a_k$caso esse limite exista, chamando-a assim de série convergente. Caso o limite $\lim \sum_{k=1}^{n} a_k$ não exista, dizemos que a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é divergente.

Definição: Chamamos uma série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ de absolutamente convergente se a série $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ é convergente.

Bem, é claro que a sequência $\{s_n\}_{n\geq 1}$ dada por $s_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ é crescente e, caso seja limitada, pelo corolário do teorema 2, obtemos que a mesma é convergente. Assim, para qualquer sequência $\{a_n\}$ ou $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ é convergente ou $\lim \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \infty$ e portanto escrevemos $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \infty$

Se uma série convergente não é absolutamente convergente, dizemos que ela é condicionalmente convergente.

Teorema 4: Toda série absolutamente convergente é convergente.

Prova: Defina $p_n = a_n$, $q_n = 0$ se $a_n \geq 0$ e $p_n = 0,\ q_n = -a_n$ se $a_n < 0$. Daí, $|a_n| = p_n + q_n$ e $a_n = p_n - q_n$. Seja $S = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Assim, $S \geq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \geq \sum_{k=1}^{n} p_k$. Assim, como a sequência $\{\sum_{k=1}^{n} p_k\}_{n\geq 1}$ é crescente e limitada, então é convergente. Analogamente, $\{\sum_{k=1}^{n} q_k\}_{n\geq 1}$ é convergente. Assim, $\{\sum_{k=1}^{n} p_k - \sum_{k=1}^{n} q_k = \sum_{k=1}^{n} a_k\}_{n\geq 1}$ é convergente (exercício 1). E portanto a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é convergente.

Exercícios

1. Sejam $\{x_n\}_{n\geq 1}$ e $\{y_n\}_{n\geq 1}$ sequências convergentes com $a = \lim x_n$ e $b = \lim y_n$.
   (a) Seja k um número real. Prove que $\lim k\, x_n = ka$
   (b) Prove que $\lim x_n + y_n = a + b$
   (c) Prove que $\lim x_n\, y_n = ab$
   (d) Se $b \neq 0$, prove que $\lim \quad \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

2. Demonstre as afirmações abaixo:

(a) Se $\lim x_n = \infty$ e $\{y_n\}$ é limitada inferiormente, então $\lim(x_n + y_n) = \infty$.

(b) Se $\lim x_n = \infty$ e existe $c > 0$ tal que $y_n > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim(x_n y_n) = \infty$

(c) Se $x_n > c > 0$ e $y_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim y_n = 0$ então $\lim \quad \frac{x_n}{y_n} = \infty$.

(d) Se $\{x_n\}$ é limitada e $\lim y_n = \infty$ então $\lim \quad \frac{x_n}{y_n} = 0$.

3. Dadas as sequências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, defina $\{z_n\}$ pondo $z_{2n-1} = x_n$ e $z_{2n} = y_n$. Suponha que $\lim x_n = \lim y_n = a$, prove que $\lim z_n = a$.

4. Um número real a é chamado *valor de aderência* da sequência $\{x_n\}$ quando $\{x_n\}$ admite uma subsequência convergente cujo limite é a .

(a) É claro pelo teorema 1 que se uma sequência é convergente ela possui um único valor de aderência. É verdade que se uma sequência possui um único valor de aderência ela é convergente?

(b) Existe uma sequência $\{y_n\}$ cujo conjunto dos valores de aderência é $\mathbb{N}$?

(c) Existe uma sequência $\{z_n\}$ cujo conjuntos dos valores de aderência seja $[0,1]$?

5. Sejam a e b reais positivos, defina indutivamente as sequências $\{x_n\}_{n\geq 1}$, $\{y_n\}_{n\geq 1}$ pondo $x_1 = \sqrt{ab}$, $y_1 = \frac{a+b}{2}$, e para $n \geq 1$: $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$. Prove que $\{x_n\}_{n\geq 1}$, $\{y_n\}_{n\geq 1}$ convergem e $\lim x_n = \lim y_n$.

6. Resolva os itens abaixo:

(a) **(Teorema do confronto)** Sejam $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$três sequências com $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tais que $\lim x_n = \lim z_n = L$, então existe $\lim y_n$ e $\lim y_n = L$.

(b) Sejam $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ três sequências com $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tais que $\lim x_n < \lim z_n$, é necessariamente verdade que $\lim y_n$ existe?

7. Seja $a > 0$ e $\{x_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência definida por $x_1 = \sqrt{a}$ e para $n \geq 1$, $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$. $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge? Se sim, qual seu limite?

8. Seja $\{F_n\}_{n\geq 1}$ a sequência de Fibonacci dada por $F_1 = F_2 = 1$ e para $n \geq 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Existe $\lim \quad \frac{F_n}{F_{n+1}}$? Se sim, calcule-o.

10. Prove que $\lim \sqrt[n]{n!} = \infty$.

11. Se $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$ e $\{t_n\}$ uma sequência de reais positivos tais que $\lim t_1 + t_2 + \cdots + t_n = +\infty$. Prove que $\lim \frac{t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n}{t_1 + t_2 + \cdots + t_n} = a$

12. Resolva os itens abaixo:

(a) Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

(b) Determine todos os $p > 0$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente.

(c) Sejam $d(n)$ e $\sigma(n)$ a quantidade de divisores positivos e a soma dos divisores positivos de n, respectivamente. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\sigma(n)} d(n)}{n^2}$ é convergente ou divergente?

(d) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente ou divergente?

13. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente, e seja $L = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(a) Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente. Prove que para qualquer permutação $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, onde $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos inteiros positivos, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ é convergente e $L = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.

(b) Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é condicionalmente convergente. Prove que dado qualquer $H \in \mathbb{R}$ existe permutação $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $H = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$. Prove ainda que existem permutações $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ diverge.

14. Seja $\{a_n\}_{n\geq 1}$uma sequência decrescente tal que $\lim \quad a_n = 0$. Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ é convergente.

· Conjuntos e Funções

Definição: Dizemos que um conjunto X é *limitado inferiormente* se existe real m tal que para todo $x \in X \to x \geq m$. Nesse caso, m é chamado cota inferior de X . Chamamos a maior das cotas inferiores de $\inf X$. Analogamente, dizemos que um conjunto X é *limitado superiormente* se existe real M tal que para todo $x \in X \to x \leq M$. Nesse caso, M é chamado cota superior de X . Chamamos a menor das cotas superiores de $\sup X$.

Dizemos que um conjunto é *limitado* quando ele é limitado superiormente e inferiormente.

Teorema 5: Se X é limitado superiormente, então existe uma sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ tal que $a_n \in X$ para todo n e $\lim a_n = \sup X$.

Prova: Ora, se $\sup X \in X$, tome a sequência constante $a_n \equiv \sup X$. Suponha então $\sup X$ não é um elemento de X . Então sabemos que existe um elemento $a_n \in X$ tal que $a_n > \sup X - \frac{1}{n}$, pois se isso fosse falso para algum n , então $x \in X \rightarrow x \leq \sup X - \frac{1}{n}$ para tal n , o que nos daria uma cota superior de X menor do que $\sup X$, uma contradição. Daí, podemos escolher a_n tal que $\sup X - \frac{1}{n} < a_n < \sup X$. Pelo teorema do confronto (exercício 6), $\lim a_n = \sup X$.

Teorema 5': Se X é limitado inferiormente, então existe uma sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$tal que $a_n \in X$ e $\lim a_n = \inf X$.

Prova: Análoga a prova do teorema 5.

Definição: Dizemos que um conjunto X é *aberto* se para todo $x \in X$ existe $\epsilon(x) > 0$ tal que $[x - \epsilon,\ x + \epsilon] \subset X$. Dizemos que um conjunto Y é *fechado* se para toda sequência convergente $\{a_n\}_{n\geq 1}$ de elementos de Y temos que $\lim a_n \in Y$.

Exemplos:

O conjunto $(0,1)$ é aberto, enquanto que o conjunto $[e, \pi]\ \cup\ \mathbb{Z}$ é fechado.

Observe que o conjunto $[2,3)$ não é nem aberto nem fechado, enquanto que $\mathbb{R}$ e ϕ (conjunto vazio), são ambos abertos e fechados.

Um fato interessante e que encorajamos o aluno a provar é: "Os únicos conjuntos que são simultaneamente abertos e fechados são $\mathbb{R}$ e ϕ " (exercício 25).

Definição: Dizemos que um ponto a é um *ponto de acumulação* de um conjunto X se existe uma sequência $\{a_n\}_{n\geq 0}$ de pontos em $X - \{a\}$ tal que $\lim a_n = a$. Denotaremos por X' o conjunto dos pontos de acumulação de X .

Exemplos:

Se $X = (1,2) \rightarrow X' = [1,2]$

Se $X = \mathbb{Z} \rightarrow X' = \phi$

Se $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \rightarrow X' = \{0\}$

Dizemos que um ponto $b \in X - X'$ é um *ponto isolado* de X .

Observe que x é um ponto isolado de X se, e somente se, existe $\epsilon > 0$ tal que $[x - \epsilon,\ x + \epsilon] \cap X = \{x\}$.

Definição: Seja $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon\ X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'$. Dizemos que $L = \lim_{x\to a} f(x)$ quando para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $x \in X - \{a\}$, $|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$, em outras palavras, para qualquer erro $\epsilon > 0$ todo ponto suficientemente próximo de a (possivelmente excetuando o a) tem a imagem a uma distância menor que ϵ de L . (Note que isso NÃO implica que $f(a) = L$, nem mesmo que $a \in X$).

Exemplos:

Se $f\colon (1,2) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$, então $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.

Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Dada por $f(x)=-x$ para todo $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ e $f(2)=2022$, então $\lim_{x\to 2} f(x)=-2$.

Se $f:\left\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\right\}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\frac{1}{x}$, então apesar de 0 ser ponto de acumulação de $\left\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\right\}$, não existirá $\lim_{x\to 0} f(x)$

Se $f:\left\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{\frac{1}{\sqrt{p}}: p\ primo\right\}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x+1$ se $x\in\left\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\right\}$ e $f(x)=x+2$ se $x\in\left\{\frac{1}{\sqrt{p}}: p\ primo\right\}$, não existirá $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Se $f:\left\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{\frac{1}{\sqrt{p}}: p\ primo\right\}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\pi x$ se $x\in\left\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\right\}$ e $f(x)=-\sqrt{2022}x^{37}$ se $x\in\left\{\frac{1}{\sqrt{p}}: p\ primo\right\}$, teremos $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

Interessante, não?

Observe que caso exista $\lim_{x\to a} f(x)$ tal limite é único, uma vez que se tal função pudesse assumir dois limites $L<M$, tome $\epsilon=\frac{M-L}{3}$, assim, existem $\delta_1\ e\ \delta_2$ tais que $x\in X-\{a\}, |x-a|<\delta_1\to |f(x)-L|<\epsilon$ e $x\in X-\{a\}, |x-a|<\delta_2\to |f(x)-M|<\epsilon$.

Entretanto para $x\in X-\{a\}, |x-a|<\min\{\delta_1,\delta_2\}\to |f(x)-M|<\epsilon$, $|f(x)-L|<\epsilon$ o que nos dá $3\epsilon=|M-L|\leq|M-f(x)|+|f(x)-L|<2\epsilon$, uma contradição.

Exercícios

15. Resolva o que se pede.

(a) Sejam A_1 e A_2 conjuntos abertos. Prove que $A_1\cap A_2$ é aberto.

(b) Seja Γ uma família de conjuntos abertos. Prove que a união de todos os conjuntos de Γ é um conjunto aberto.

(c) Dê um exemplo de uma família Γ de abertos tal que a intersecção de todos eles não é aberta.

(d) Seja $A\subset\mathbb{R}$ um conjunto. Prove que A é aberto se, e somente se, $\mathbb{R}-A$ é fechado.

(e) Conclua que: Seja Ω uma família de conjuntos fechados. Prove que a intersecção de todos os conjuntos de Ω é fechado. Além disso, se $\Omega'\subset\Omega$ é uma subfamília finita, então a união dos elementos de Ω' é fechado.

16. **(Conjuntos compactos)** Dizemos que um conjunto X é *compacto* se, para qualquer sequência $\{a_n\}$ de elementos de X , tal sequência possui uma subsequência convergente cujo limite é um elemento de X . Prove que Y é compacto se, e somente se, Y é fechado e limitado.

17. **(Teorema do confronto)** Sejam f,g,h: $X\to\mathbb{R}$ e $a\in X'$. Suponha que $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ para todo $x\in X$ e que existam os limites $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} h(x)$ e satisfaçam $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=L$. Prove que $\lim_{x\to a} g(x)=L$.

18. Sejam $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Suponha que existam os limites $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Prove que:

(a) Sendo $k \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} kf(x) = kL$.

(b) $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = L + M$

(c) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$

(d) Se $M \neq 0$, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$.

19. Sejam $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 0$ se x é irracional, $f(x) = x$ se $x \in \mathbb{Q}$; $g(0) = 1$ e $g(x) = 0$ se $x \neq 0$. Mostre que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{y\to 0} g(y) = 0$, porém não existe $\lim_{x\to 0} g\big(f(x)\big)$.

20. Considere uma circunferência de centro O e raio unitário e P um ponto sobre tal circunferência. Seja T um ponto do plano tal que TP é tangente à circunferência. Seja R a intersecção do segmento OT com a circunferência. Seja $x = \angle TOP$.

(a) Através das áreas dos triângulos $\triangle TOP$, $\triangle ROP$ e do setor circular ORP prove que $sen(x) \leq x \leq \tan x$, para todo $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(b) Utilizando o item (a) e o fato de $sen(x)$ ser uma função ímpar e $\cos(x)$ ser uma função par, prove que existe o limite $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}$ e calcule-o.

Definição (Continuidade de uma função): Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $a \in X$. Então as duas proposições abaixo são equivalentes.

(i) Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $x \in X$, $|x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \epsilon$.

(ii) Para qualquer sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ de elementos de X com $\lim a_n = a$ temos $\lim f(a_n) = f(a)$.

Se um par (f, a) satisfaz uma, e então ambas, proposições acima, dizemos que f **é contínua em** a.

Note que não precisa necessariamente que $a \in X'$, na verdade, se a é um ponto isolado, então f é contínua em a para qualquer f.

Exercício 21: Provar a equivalência acima.

Definição: Dizemos que $f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua se f é contínua em x para todo $x \in X$.

Quando estamos no Ensino Fundamental, geralmente vemos a definição vulgar de função contínua como “uma função que podemos desenhar o gráfico sem tirar o lápis do papel”. Bem, tal definição é de certa forma verdade quando o domínio é um intervalo, mas quando não é... a coisa fica um pouco mais complexa. Por exemplo, se tomarmos X um conjunto de pontos isolados, nunca conseguiremos desenhar $f: X \to \mathbb{R}$ sem tirar o lápis do papel, apesar de qualquer uma dessas funções ser contínua.

Teorema do valor intermediário: Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $d \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Prova: Considere o conjunto $X = \{x \in [a, b]:\ f(x) < d\}$. Como tal conjunto é limitado, então pelo teorema 5 ele possui uma sequência de elementos, digamos $\{a_n\}$ que converge para $\sup X$. Como $a_n \in [a, b]$ para todo n , e $[a, b]$ é fechado, segue que $\sup X \in [a, b]$. Como $\lim a_n = \sup X$ e f é contínua, $\lim f\ (a_n) = f(\sup X)$. Como $f(a_n) < d$ para todo n segue que $f(\sup X) \leq d$.

Bem, se $f(\sup X) = d$, tá resolvido. Caso contrário, $\sup X \in X$ e portanto $\sup X < b$. Considere agora a sequência $b_n = \sup X + \frac{b - \sup X}{n}$. Bem, $\lim b_n = \sup X$ o que nos dá $\lim f\ (b_n) = f(\sup X)$. Mas como $b_n > \sup X$, $f(b_n) \geq d$ o que nos dá $\sup X \geq d$, uma contradição. Logo $f(\sup X) = d$.

Teorema 6: Se X é um conjunto compacto (limitado e fechado) e $f: X \to \mathbb{R}$ é contínua, então $\{f(x):\ x \in X\}$ é compacto.

Prova: Bem, suponha que $\{f(x): x \in X\}$ não seja limitado. Então existe uma sequência $\{f(x_n)\}$ tal que $|f(x_n)| > n$ para todo n . Como $\{x_n\}$ é limitado, então pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, $\{x_n\}$ possui uma subsequência convergente, digamos $\{x_{n_k}\}$. Como $n_k \geq k$, definindo $y_k = x_{n_k}$temos $|f(y_k)| = |f(x_{n_k})| > n_k \geq k$ e $\{y_k\}$ convergente. Seja $L = \lim y_k$. Pela continuidade de f : $f(L) = \lim f\ (y_k)$, em particular, existe $\lim f\ (y_k)$ e portanto pelo exercício 1, existe $\lim f\ (y_k)^2 = L^2$, uma contradição pois $\lim f\ (y_k)^2 = \infty$.

Suponha agora que $\{f(x): x \in X\}$ não seja fechado. Então existe uma sequência $\{f(x_n)\}$ convergente tal que $L = \lim f\ (x_n)$ não está em $\{f(x): x \in X\}$. Como $\{x_n\}$ é limitado, $\{x_n\}$ possui subsequência convergente, digamos $\{x_{n_k}\}$. Como $\{f(x_{n_k})\}$ é subsequência de $\{f(x_n)\}$, $\lim f\ (x_{n_k}) = L$. Seja $M = \lim x_{n_k}$, então pela definição de limite, $f(M) = L$ contradizendo o fato de L não ser elemento de $\{f(x): x \in X\}$.

Portanto, $\{f(x): x \in X\}$ é compacto.

Corolário (Weierstrass): Se X é compacto e $f: X \to \mathbb{R}$ é contínua, então $\{f(x): x \in X\}$ admite máximo e mínimo.

Tal corolário segue do teorema 6 do exercício abaixo.

Exercício 22: Prove que todo conjunto compacto admite máximo e mínimo.

Bem, vamos agora pensar em bijeções. Se $f: X \to Y$ é uma bijeção contínua, então $f^{-1}: Y \to X$é contínua? Bem, na verdade isso nem sempre acontece. Vejamos um exemplo:

f: $[-1,0] \cup (1,2] \to [0,4]$ dada por $f(x) = x^2$, o que acontece com f^{-1}?

Teorema 7: Se X é compacto e $f: X \to Y$ é uma bijeção contínua, então $f^{-1}: Y \to X$ é contínua.

Prova: Pelo teorema 6, Y é compacto. Seja $b = f(a) \in Y$. Mostremos que f^{-1} é contínua em b . Considere uma sequência $\{f(t_n)\}$ de elementos de Y que converge para b . Mostremos que $\lim t_n = a$, caso contrário, existe $\epsilon > 0$ tal que existem infinitos n satisfazendo $|t_n - a| \geq \epsilon$. Considere $\{a_n\}$ a subsequência de tais $t_n s$. Como $\{a_n\}$ é limitado, possui subsequência convergente, digamos $\{b_n\}$. Seja $h = \lim b_n$. Como $b_n \in X$ para todo n e X é compacto, segue que $h \in X$. Como $\{f(b_n)\}$ é subsequência de $\{f(t_n)\}$, segue que $\lim f(b_n) = b$. Daí, como f é contínua, $f(h) = \lim f(b_n) = b$ e portanto, como f é bijetiva, $h = a$, ou seja, $\lim b_n = a$, uma contradição com o fato $|b_n - a| \geq \epsilon$ para todo n .

Portanto, $\lim t_n = a$, isto é, $\lim f^{-1}\left(f(t_n)\right) = f^{-1}(b)$. O que prova a continuidade de f em b .

Definição: Dizemos que uma função $f: X \to \mathbb{R}$ é convexa quando para todos $x, y \in X,\ x < y$ temos que o gráfico da restrição $f: [x, y] \cap X \to \mathbb{R}$ está abaixo do segmento com extremos em $\left(x, f(x)\right)$ e $\left(y, f(y)\right)$. Bem, essa definição geométrica parece bem agradável, não? Agora vamos formalizá-la de maneira algébrica:

Bem, o intervalo $[x, y]$ pode ser parametrizado por $\{tx + (1-t)y\colon\ t \in [0,1]\}$. Veja que o ponto do segmento acima que tem abscissa $tx + (1-t)y$ é $\left(tx + (1-t)y,\ tf(x) + (1-t)f(y)\right)$, enquanto que o ponto do gráfico de f com essa abscissa é $\left(tx + (1-t)y,\ f(tx + (1-t)y)\right)$. Como o gráfico está abaixo do segmento, segue que $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$. E assim finalmente obtemos uma definição algébrica de função convexa.

"Uma função $f: X \to \mathbb{R}$ é dita convexa se para todo $x, y \in X,\ t \in [0,1]$ tais que $tx + (1-t)y \in X$ temos que: $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$"

Uma função $f: X \to \mathbb{R}$ é dita côncava se para todos $x, y \in X$ temos que o gráfico da restrição $f: [x, y] \cap X \to \mathbb{R}$ está acima do segmento com extremos em $\left(x, f(x)\right)$ e $\left(y, f(y)\right)$. Algebricamente:

"Uma função $f: X \to \mathbb{R}$ é dita côncava se para todo $x, y \in X,\ t \in [0,1]$ tais que $tx + (1-t)y \in X$ temos que: $f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$"

Teorema 8: Seja $f: X \to \mathbb{R}$ convexa, então para quaisquer $x, y \in X$, o gráfico da restrição $f: X - [x, y] \to \mathbb{R}$ está acima da reta que liga $\left(x, f(x)\right)$ a $\left(y, f(y)\right)$.

Prova: Suponha sem perda de generalidade $x < y$. Agora seja $a \in X - [x, y]$. Façamos o caso em que $a < x$ (o caso $a > y$ é análogo). Daí existe $t \in (0,1)$ tal que $x = ta + (1-t)y$, assim $f(x) \leq tf(a) + (1-t)f(y) \ \to f(a) \geq \frac{1}{t}f(x) + \frac{(t-1)}{t}f(y)$. Veja que como $a = \frac{1}{t}x + \frac{t-1}{t}y$ então o ponto da reta acima que tem abscissa $\frac{1}{t}x + \frac{t-1}{t}y$ é $\left(\frac{1}{t}x + \frac{t-1}{t}y,\ \frac{1}{t}f(x) + \frac{t-1}{t}f(y)\right)$. Está provado o resultado.

Teorema 9: Seja $f: X \to \mathbb{R}$ convexa tal que X admite máximo e mínimo. Sejam $a = \min X$, $b = \max X$. Então f admite máximo e $\max\{f(x)\colon\ x \in X\} = \max\{f(a), f(b)\}$.

Prova: Seja $x \in X$, então existe $t \in [0,1]$ tal que $x = ta + (1-t)b$, daí $f(x) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \leq t \cdot \max\{f(a), f(b)\} + (1-t) \cdot \max\{f(a), f(b)\} = \max\{f(a), f(b)\}$.

Note, que tal função não precisa ter mínimo. Um exemplo é a função $f: [-1,1] - \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.

Definição (derivada de uma função): Seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X \cap X'$. As duas proposições abaixo são equivalentes:

(i) Existe o limite $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

(ii) Existe um real $c(a)$ e uma função $r_a: X \to \mathbb{R}$ tais que $f(a+h) = f(a) + ch + r(h)$, sempre que $a + h \in X$, onde $\lim_{x \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$.

A prova dessa equivalência é bem simples e deixamos como exercício ao leitor.

Dizemos que se um par (f, a) satisfaz uma, e portanto as duas, das proposições acima, dizemos que *f é diferenciável em a* . Denotemos tal limite em (i) por $f'(a)$ que, adivinha só, em (ii) $c = f'(a)$.

Definição: Seja X um conjunto tal que $X \subset X'$, então dizemos que $f: X \to \mathbb{R}$ é *diferenciável*, se ela é diferenciável para todo $x \in X$.

Exercício 23:Se uma função $f: X \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $a \in X \cap X'$, então ela é contínua em a .

Teorema 10: Seja $f: X \to \mathbb{R}$ diferenciável em $a \in X \cap X'$ tal que $f'(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que se $a - \delta < x < a < y < a + \delta$ então $f(x) < f(a) < f(y)$.

Prova: Ora, como $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$ para todo $|x - a| < \delta$. O resultado segue.

Teorema 10': Seja $f: X \to \mathbb{R}$ diferenciável em $a \in X \cap X'$ tal que $f'(a) < 0$, então existe $\delta > 0$ tal que se $a - \delta < x < a < y < a + \delta$ então $f(x) > f(a) > f(y)$.

Prova: Análoga ao teorema 10.

Cuidado: Muitos alunos cometem o erro de dizer que se $f: X \to \mathbb{R}$ é diferenciável em a com $f'(a) > 0$, então ela é estritamente crescente em um intervalo $[a - \delta, a + \delta] \cap X$. Isso é falso!! Um bom exemplo é: Tome $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ e $f: X \to \mathbb{R}$ dada por $f(0) = 0$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ se n ímpar e $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n+2022\sqrt{n}}{n^2}$ se n par.

Veja que $X' = \{0\}$, $\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$ se n ímpar e $\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{2022}{\sqrt{n}}$ se n é par. Daí, existe $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ o que nos dá $f'(0) = 1$. Mas observe que para n ímpar $f\left(\frac{1}{n}\right) < f\left(\frac{1}{n+1}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{n+1+2022\sqrt{n+1}}{(n+1)^2} \Leftrightarrow n + 1 < 2022n\sqrt{n+1} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < 2022\sqrt{n+1}$que é verdade, apesar de $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$.

Definição: Dizemos que a é um *ponto de acumulação à direita* de X ($a \in X'_+$) se a é ponto de acumulação de $X \cap (a, \infty)$. Analogamente, a é um *ponto de acumulação à esquerda* de X ($a \in X'_-$) se a é ponto de acumulação de $X \cap (-\infty, a)$.

Teorema 11: Seja $f: X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ tal que existe $f'(a)$ e a é um ponto de mínimo local ou de máximo local, isto é, existe $\delta > 0$ tal que $\min\{f(x): x \in [a-\delta,\ a+\delta]\} = f(a)$ ou $\max\{f(x): x \in [a-\delta,\ a+\delta]\} = f(a)$. Então $f'(a) = 0$

Prova: Façamos o caso em que a é ponto de mínimo local (o outro é análogo), isto é, $\min\{f(x): x \in [a-\delta,\ a+\delta]\} = f(a)$. Bem, como existe $f'(a)$, vejamos cada situação:

(i) Se $f'(a) > 0$, pelo teorema 10, existe $l \in [a-\delta,\ a)$ tal que $f(l) < f(a)$.
(ii) Se $f'(a) < 0$, pelo teorema 10', existe $l \in (a,\ a+\delta]$ tal que $f(l) < f(a)$.

Ambos geram uma contradição. Portanto, $f'(a) = 0$.

Observações:

(1) Observe a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$. Apesar de $0 \in \mathbb{R} \cap \mathbb{R}'_+ \cap \mathbb{R}'_-$ e 0 ser mínimo local, $f'(0)$ não existe.
(2) Observe a função da parte "Cuidado" acima. Apesar de 0 ser mínimo local e $0 \in X \cap X'$ e existir $f'(0)$, 0 não é elemento de X'_- e daí o teorema não é aplicado.
(3) A volta do teorema não é verdade. Tome a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. Bem, temos que $0 \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ e $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^2$ para todo $x \neq 0$ e como $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ segue que $f'(0) = 0$, mas 0 não é nem máximo nem mínimo local.

Teorema de Rolle: Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua com f diferenciável em (a,b) e $f(a) = f(b)$. Então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Prova: Pelo teorema de Weierstrass (corolário do teorema 6), como $[a,b]$ é compacto e f contínua, $Im(f)$ é compacto e portanto admite mínimo e máximo.

(i) Se $M = m$ então a função é constante, cuja derivada em todo ponto de (a,b) vai ser nula. De fato, para $x \in (a,b)$, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = 0$ para todo $y \neq x$ e daí $f'(x) = 0$.
(ii) Se $m < M$ então ou $f(a) > m$ ou $f(a) < M$. Vejamos o caso em que $f(a) = f(b) > m$. Assim existe $c \in (a,b)$ com $f(c) = m$, o que torna c mínimo local. Logo, $f'(c) = 0$.
(iii) O caso em que $f(a) = f(b) < M$ é análogo.

Ora, muito de vocês que conhecem o Teorema de Valor Médio devem achar o Teorema de Rolle meio "fraquinho". Bem, de o Teorema de Valor Médio é mais forte, mas iremos usar o teorema de Rolle na prova dele.

Teorema do Valor Médio: Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua com f diferenciável em (a,b). Então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Geometricamente falando, $f'(c)$ é coeficiente angular da reta que passa por $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$.

Prova: Considere $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - dx$, onde $d = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Daí, $g(a) = g(b)$. Além disso, prova-se que $g'(x) = f'(x) - d$ para todo $x \in (a, b)$(Prove isso. Dica: Exercício 18). O resultado segue por Rolle.

Bem, aqui termina a nossa teoria. Vejamos alguns exercícios importantes.

Exercícios

24. No teorema 5, vimos que se X é limitado superiormente, então existe uma sequência $\{a_n\}$ de elementos de X tal que $\lim a_n = \sup X$. Prove que existe uma sequência $\{a_n\}$ desse tipo que seja crescente (não necessariamente estritamente).

25. Prove que os únicos conjuntos reais que são simultaneamente abertos e fechados são $\mathbb{R}$ e ϕ .

26. Sejam f, g: $X \to \mathbb{R}$, $a \in X$.

(a) Se f, g são contínuas em a . Prove que $f \pm g$ e fg são contínuas em a . Prove ainda que se $g(a) \neq 0$ então $\frac{f}{g}$ é contínua em a .

(b) Se f, g são diferenciáveis em a . Prove que $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$, $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$. Prove ainda que se $g(a) \neq 0$ então $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$ concluindo finalmente que $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

26. **(Regra da cadeia)** Sejam $f: Y \to \mathbb{R}$, $g: X \to Y$. Seja $a \in Y \cap Y'$tal que g é diferenciável em a e $g(a) \in Y \cap Y'$ tal que f é diferenciável em $g(a)$. Prove que $(fog)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a)$.

27. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Prove que toda função contínua injetiva $f: I \to \mathbb{R}$ é monótona e que sua inversa $g: f(I) \to I$ é contínua.

28. Dizemos que uma função f: $X \to \mathbb{R}$ é *Lipschitz* quando existe $\kappa > 0$ tal que para todos $x, y \in X$ temos $|f(x) - f(y)| \leq \kappa|x - y|$ (Podemos também chamá-la de função κ-*Lipschitz* caso queiramos especificar a constante)

(a) Prove que toda função Lipschitz é contínua.

(b) Prove que se X é compacto, $\kappa < 1$ e $f(X) \subset X$ então para qualquer $x \in X$, $\{f^n(x)\}_{n\geq 1}$ converge. (Onde f^n denota a iteração de f n vezes).

(c) (Teorema do ponto fixo de Banach) Nas condições do item (b), prove que f admite um único ponto fixo.

29. Seja I um intervalo aberto tal que $f: I \to \mathbb{R}$ é diferenciável e existe $k > 0$ tal que $|f'(x)| < k$ para todo $x \in X$. Prove que f é k -Lipschitz.

30. **(Derivada de polinômios)** Resolva os itens:

(a) Seja n um inteiro positivo. Prove que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$é diferenciável e calcule $f'(x)$.

(b) Prove que todo polinômio $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de uma variável e coeficientes reais é diferenciável. Em particular, ele é contínuo.

(c) Prove que sendo P o polinômio do item anterior, então $P'(x)$é um polinômio com $\deg P'(x) = \deg P - 1$ se $\deg P \geq 1$ou $P' \equiv 0$ se P é constante.

31. Seja $f: I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo, uma função 2 vezes diferenciável, isto é, $f': I \to \mathbb{R}$ existe e é diferenciável. Prove que f é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.

32. **(Desigualdade de Jensen)** Seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Prove que para quaisquer $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ e $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_{>0}$ com $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ e $\sum_{i=1}^{n} t_i\, x_i \in X$ temos que $f(\sum_{i=1}^{n} t_i\, x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i\, f(x_i)$. Como ficaria a desigualdade se f fosse côncava em vez de convexa?

Problemas

1. (OBM 2021) Um conjunto A de números reais é *enquadrado* quando é limitado, e para todos $a, b \in A$ não necessariamente distintos, $(a-b)^2 \in A$. Qual é o menor número real que pertence a algum conjunto enquadrado.

2. (OBM 2003) Seja $f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ tal que:
   (i) Se $x < y$, então $f(x) < f(y)$.
   (ii) Para todos $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ temos que $f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$

   Prove que existe $x \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $f(x) < 0$.

   OBS: $\mathbb{R}_{>0}$ denota o conjunto dos reais positivos.

3. (IMC 2018) Sejam $\{a_n\}_{n\geq 1}$ e $\{b_n\}_{n\geq 1}$ sequências de reais positivos. Prove que as duas proposições abaixo são equivalentes:
   (i) Existe uma sequência $\{c_n\}_{n\geq 1}$ de reais positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b_n}$ convergem.
   (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}$ converge.

4. (IMC 2018) Seja $\{a_n\}_{n\geq 0}$ uma sequência de números reais tal que $a_{n+1}^3 = a_n^2 - 8$ para todo $n \geq 0$.

Prove que a série $\sum_{n=0}^{\infty}|a_{n+1} - a_n|$ é convergente.

5. (IMC 2018) Considere a seguinte sequência $(a_n)_{n\geq 1} = (1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,1,2,3,4,5,1,\dots)$. Encontre todos os pares $(\alpha,\ \beta)$ de reais positivos tais que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n^\alpha} = \beta$$

6. Defina a sequência $a_0,\ a_1,\ \dots$ por $a_0 = 1,\ a_1 = \frac{1}{2}$, e $a_{n+1} = \frac{n a_n^2}{1+(n+1)a_n}$, para todo $n \geq 1$. Prove que a série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ converge e determine seu valor.

7. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Um ponto x é chamado *shadow point* se existe $y \in \mathbb{R}$ com $y > x$ tal que $f(y) > f(x)$. Sejam $a < b$ números reais e suponha que

· Todos os pontos no intervalo aberto $I = (a, b)$ são shadow points;

· a e b não são shadow points.

Prove que:

(a) $f(x) \leq f(b)$ para todos $a < x < b$.
(b) $f(a) = f(b)$.

8. Para $R > 0$ inteiro, denote por $n(R)$ a quantidade de pares $(x, y) \in \mathbb{Z}$ tais que $x^2 + y^2 = R$. Qual o valor de

$$\lim_{R\to\infty} \frac{n(1)+n(2)+\cdots+n(R)}{R}?$$

8. (China) Dado um inteiro $n \geq 2$ e números reais $0 < a < b$. Sejam $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n \in [a, b]$. Encontre (em função de $n,\ a,\ b$) o valor máximo de

$$\frac{\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} + \frac{x_n^2}{x_1}}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$$

9. Seja $P(x)$ um polinômio não-nulo ímpar de grau $n > 1$ com coeficientes reais não-negativos. Seja $\Gamma = \{(x, P(x)):\ x \in \mathbb{R}\}$ o gráfico desse polinômio no plano coordenado. Existem pontos $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n \in \Gamma$, distintos 2 a 2, tais que a reta tangente a Γ em A_i também passa por A_{i+1}para todo $i = 1,2,\dots,n$, onde $A_{n+1} = A_1$?

10. (Ibero 2016) Encontre todos as triplas de reais positivos (x, y, z) tais que

$$x = \frac{1}{y^2 + y - 1}$$

$$y = \frac{1}{z^2 + z - 1}$$

$$z = \frac{1}{x^2 + x - 1}$$

Referência

Análise Real Vol 1, Coleção Matemática Universitária, Elon Lages Lima